Exkurs: MHD

Wir betrachten ein Vollionisiertes Plasma und führen folgende kombinierte Größen ein:

$$\rho = n_i m_i + n_e m_e \approx n(m_i + m_e)$$ Massendichte

$$\vec{v} = \frac{1}{\rho}(n_i m \vec{v}_i + n_e m \vec{v}_e) \approx \frac{m_i \vec{v}_i + m_e \vec{v}_e}{m_i + m_e}$$ Geschwindigkeit

$$\vec{j} = e(m_i \vec{v}_i - m_e \vec{v}_e) \approx n e (v_i - v_e)$$ Stromdichte

Impulsbilanzen für Elektronen und Ionen:

$$m_i n \frac{\partial \vec{v}_i}{\partial t} = e n (\vec{E} + \vec{v}_i \times \vec{B}) - \nabla p_i + M n \vec{g} + \vec{P}_{ie}$$

$$m_e n \frac{\partial \vec{v}_e}{\partial t} = e n (\vec{E} + \vec{v}_e \times \vec{B}) - \nabla p_e + M n \vec{g} + \vec{P}_{ei}$$

Zur Vereinfachung: Viskosität vernachlässigt, für die Kollisionsterme gilt:

$$\vec{P}_{ei} = -\vec{P}_{ie} = \underbrace{\eta}_{Spitzer\ Resistivity} e^2 n^2 (\vec{v}_i - \vec{v}_e)$$

Exkurs: MHD

Für die Summe der Impulsbilanzen ergibt sich mit den vorherigen Definitionen:

$$\rho \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = \vec{j} \times \vec{B} - \nabla p + \rho \vec{g} \quad , \quad \text{mit:} \quad p = p_e + p_i$$

Multiplikation der Impulsbilanz für Elektronen mit der Ionenmasse + CC und Differenzbildung:

$$Mmn \frac{\partial}{\partial t} (\vec{v}_i - \vec{v}_e) = en(M+m)\vec{E} + en(m\vec{v}_i + M\vec{v}_e) \times \vec{B}$$
$$- m \nabla p_i + M \nabla p_e - (M+m) P_{ei}$$

$$\rightarrow \frac{Mmn}{e} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\vec{j}}{n} \right) = e \rho E - (M+m) n e \eta \vec{j} - m \nabla p_i + M \nabla p_e$$
$$+ en(m\vec{v}_i + M\vec{v}_e) \times \vec{B}$$

Der letzte Term lässt sich vereinfachen:

$$(m\vec{v}_i + M\vec{v}_e) = M\vec{v}_i + m\vec{v}_e + M(\vec{v}_e - \vec{v}_i) + m(\vec{v}_i - \vec{v}_e) = \frac{\rho}{n} \vec{v} - (M-m) \frac{\vec{j}}{ne}$$

Exkurs: MHD

Hieraus erhält man das verallgemeinerte ohmsche Gesetz:

$$\vec{E}+\vec{v}\times\vec{B}-\eta\vec{j}=\frac{1}{e\rho}\left[\frac{Mmn}{e}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\vec{j}}{n}\right)+(M-m)\vec{j}\times\vec{B}+m\nabla p_i-M\nabla p_e\right]$$

Betrachtet man langsame Bewegungen und m/M → 0, erhält man die bekannte Form:

$$\vec{E}+\vec{v}\times\vec{B}=\eta\vec{j}-\frac{1}{ne}(\vec{j}\times\vec{B}-\nabla p_e)$$

Wir vernachlässigen noch den letzten Term, bilden die Rotation und setzen das Induktions- und das Durchflutungsgesetz ein:

$$\nabla\times\vec{E}+\nabla\times(\vec{v}\times\vec{B})=\eta\nabla\times\vec{j}=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}+\nabla\times(\vec{v}\times\vec{B})$$

$$=\frac{\eta}{\mu_0}\nabla\times(\nabla\times\vec{B})=\frac{\eta}{\mu_0}\Delta\vec{B}$$

Eingefrorener Fluss

$$-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + \nabla \times (\vec{v} \times \vec{B}) = \frac{\eta}{\mu_0} \Delta \vec{B}$$

Betrachten wir ein Plasma mit verschwindender Resistivität: $\eta \rightarrow 0$

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \nabla \times (\vec{v} \times \vec{B}) = (\vec{B} \cdot \nabla) \vec{v} - \vec{B} (\nabla \cdot v)$$

Und verwenden die Kontinuitätsgleichung

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{v}) = 0$$

Folgt:

$$\dot{\vec{B}} = (\vec{B} \cdot \nabla) \vec{v} + \vec{B} \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial t}$$

Eingefrorener Fluss

$$\dot{\vec{B}} = (\vec{B}\cdot\nabla)\vec{v} + \vec{B}\frac{1}{\rho}\frac{\partial\rho}{\partial t}$$

Mit der Beziehung:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{B}{\rho}\right) = \frac{1}{\rho}\frac{\partial B}{\partial t} - \frac{B}{\rho^2}\frac{\partial\rho}{\partial t}$$

Ergibt sich

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\vec{B}}{\rho}\right) = \cancelto{0}{\left(\frac{\vec{B}}{\rho}\cdot\nabla\right)\vec{v}}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\vec{B}}{\rho}\right) = 0$$

Das Plasma ist am Magnetfeld „festgefroren“. Formaler Beweis: s. z.B. Boyd-Sanderson, s. 79

Wiederholung

R-Welle $$n_R^2 = R = 1 - \frac{\omega_{pi}^2}{\omega(\omega+\omega_{ci})} - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega(\omega-\omega_{ce})}$$

L-Welle $$n_L^2 = L = 1 - \frac{\omega_{pi}^2}{\omega(\omega-\omega_{ci})} - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega(\omega+\omega_{ce})}$$

O-Welle $$n_o^2 = P = 1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2} - \frac{\omega_{pi}^2}{\omega^2} = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}$$

X-Welle $$n_x^2 = \frac{RL}{S} = \frac{[(\omega+\omega_{ci})(\omega-\omega_{ce})-\omega_p^2][(\omega-\omega_{ci})(\omega+\omega_{ce})-\omega_p^2]}{(\omega^2-\omega_{ci}^2)(\omega^2-\omega_{ce}^2)+\omega_p^2(\omega_{ce}\omega_{ci}-\omega^2)}$$

Alfvén-Wellen

Wir betrachten niedrige Frequenzen $\omega \ll \omega_{ci}$

In diesem Fall ist die Dispersionsrelation einfach genug, um Propagation unter beliebigem Winkel zum äußeren Magnetfeld zu betrachten. Weiterhin nehmen wir wieder an: $m_e \ll m_i$

Für die Elemente des dielektrischen Tensors erhalten wir:

$$K_{xx} = K_1 = S = 1 + \frac{\omega_{pi}^2}{\omega_{ci}^2 - \omega^2} + \frac{\omega_{pe}^2}{\omega_{ce}^2 - \omega^2} \simeq 1 + \frac{\omega_{pi}^2}{\omega_{ci}^2} = 1 + \frac{\frac{n_i e^2}{\epsilon_0 m_i}}{\frac{e^2 B^2}{m_i^2}} = 1 + \frac{n_i m_i}{\epsilon_0 B^2}$$

$$= \frac{c^2 \mu_0 \rho}{B^2} = 1 + \frac{c^2}{v_A^2} \equiv K_A$$

Mit der Alfvén-Geschwindigkeit

$$v_A = \frac{B_0^2}{\sqrt{\mu_0 \rho}}$$

Und der Massendichte $\rho = n_e m_e + n_i m_i \approx n_i m_i$

Alfvén-Wellen

Für die xy, bzw. z-Elemente des dielektrischen Tensors erhalten wir

$$K_{xy} = K_2 = -iD = \frac{i\,\omega_{ci}\,\omega_{pi}^2}{\omega\left(\omega_{ci}^2 - \omega^2\right)} + \frac{i\,\omega_{ce}\,\omega_{pe}^2}{\omega\left(\omega_{ce}^2 - \omega^2\right)} \simeq \cancelto{0}{\frac{i\,\omega}{\omega_{ci}}\frac{c^2}{v_A^2}}$$

$$K_{zz} = K_3 = P = 1 - \frac{\omega_{pi}^2 + \omega_{pe}^2}{\omega^2} \simeq 1 - \cancelto{\infty}{\frac{c^2}{v_A^2}\frac{\omega_{ci}\,\omega_{ce}}{\omega^2}}$$

Damit wird die Wellengleichung zu

$$\begin{aligned}
\left(-n^2\cos^2\theta + K_A\right)E_x &= 0 \\
\left(-n^2 + K_A\right)E_y &= 0 \\
\left(\infty\right)E_z &= 0 \qquad \Rightarrow E_z = 0
\end{aligned}$$

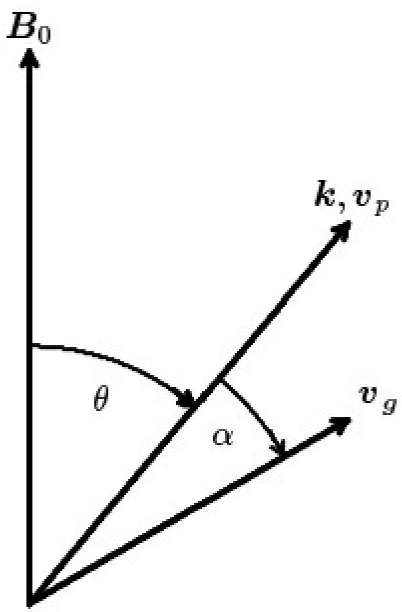
Alfvén-Wellen

Torsional (slow) Alfén Wave $E_x \neq 0, E_y = 0$

$$n^2 \cos^2\theta = K_A = 1 + \frac{c^2}{v_A^2}$$

$$\Rightarrow v_p^2 = \frac{\omega^2}{k^2} = \frac{c^2}{n^2} = \frac{c^2 v_A^2 \cos^2\theta}{\left(c^2 + v_A^2\right)} \approx v_A^2 \cos^2\theta$$

Mit: $\tan\alpha = \frac{-1}{k}\frac{\partial k}{\partial\theta}$ (s. letzte Vorlesung) folgt:



$$\frac{\partial v_p}{\partial\theta} = \frac{\partial v_p}{\partial k}\frac{\partial k}{\partial\theta} = \frac{-\omega}{k^2}\frac{\partial k}{\partial\theta} = -\frac{\omega}{k}\frac{1}{k}\frac{\partial k}{\partial\theta} = v_p \tan\alpha$$

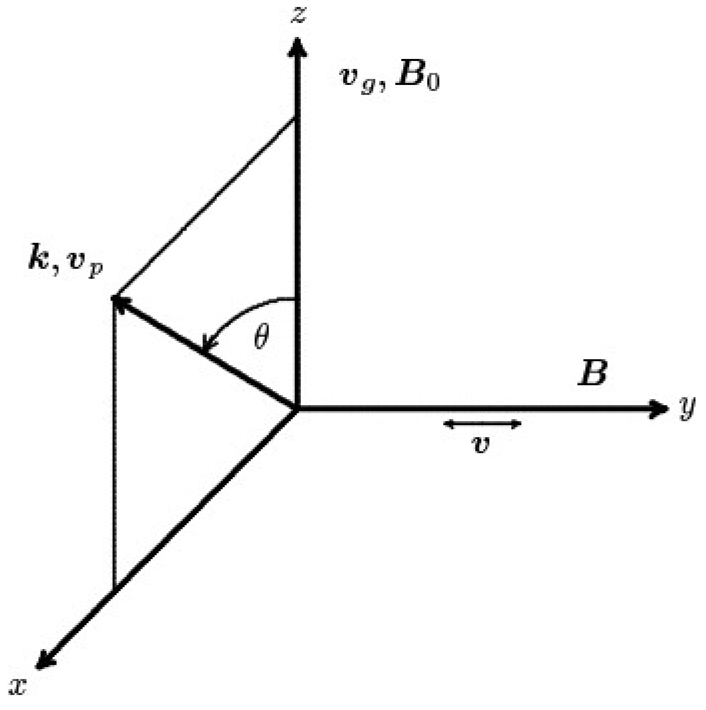
Oder $\tan\alpha = \frac{1}{v_p}\frac{\partial v_p}{\partial\theta} = -\frac{1}{v_A\cos\theta} \cdot v_A \sin\theta = -\tan\theta$

$$\Rightarrow \alpha = -\theta$$

Torsional (slow) Alfén Wave

Die Gruppengeschwindigkeit ist also in Richtung des äußeren Magnetfeldes.
Dies kann man auch folgendermaßen einsehen:

$$\vec{B}=\frac{\vec{k}\times\vec{E}}{\omega}=B_y\hat{e}_y$$



Poynting-Vektor:

$$\vec{s}=\frac{\vec{E}\times\vec{B}}{\mu_0}=\frac{E_x B_y}{\mu_0}\hat{e}_z$$

Weiterhin

$$\vec{E}=\vec{v}\times\vec{B}\Rightarrow\vec{v}=-\frac{E_x}{B_0}\hat{e}_y\Rightarrow\vec{k}\cdot\vec{v}=0$$

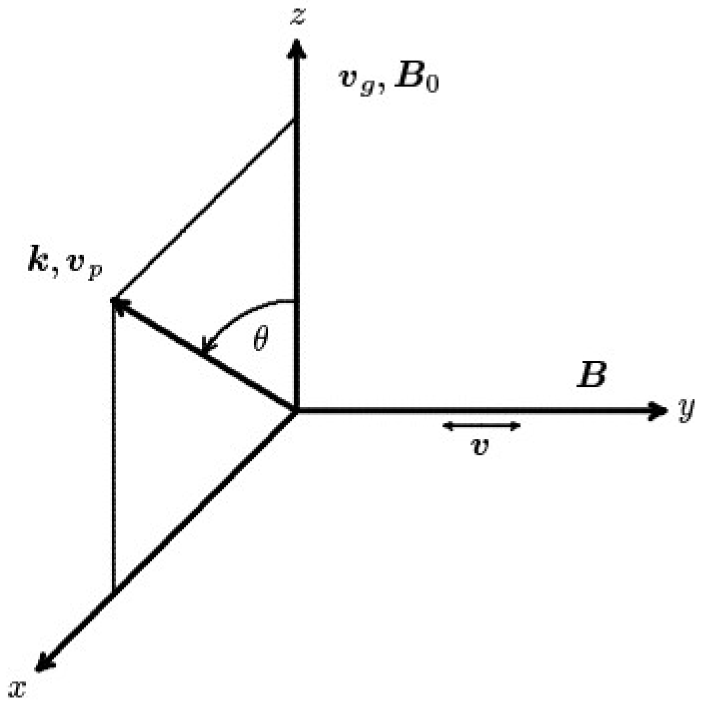
$$\Rightarrow\frac{i\omega\rho}{Nq}=0$$ keine Ladungsfluktuation

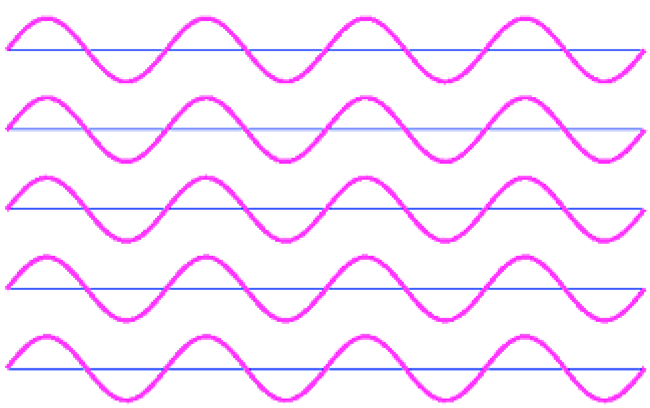
Alfvén-Wellen

Torsional (slow) Alfén Wave

Analogie zur Instrumentensaite:

$$v = \sqrt{\frac{T}{\rho_l}} = v_A = \sqrt{\frac{B_0^2}{\mu_0 \rho_m}}$$





Field lines torsion

Alfvén-Wellen

Compressional (fast) Alfén Wave $E_y \neq 0, E_x = 0$

$$n^2 = K_A = 1 + \frac{c^2}{v_A^2}$$

$$\Rightarrow v_p^2 = \frac{\omega^2}{k^2} = \frac{c^2}{n^2} = \frac{c^2 v_A^2}{\left(c^2 + v_A^2\right)} \approx v_A^2$$

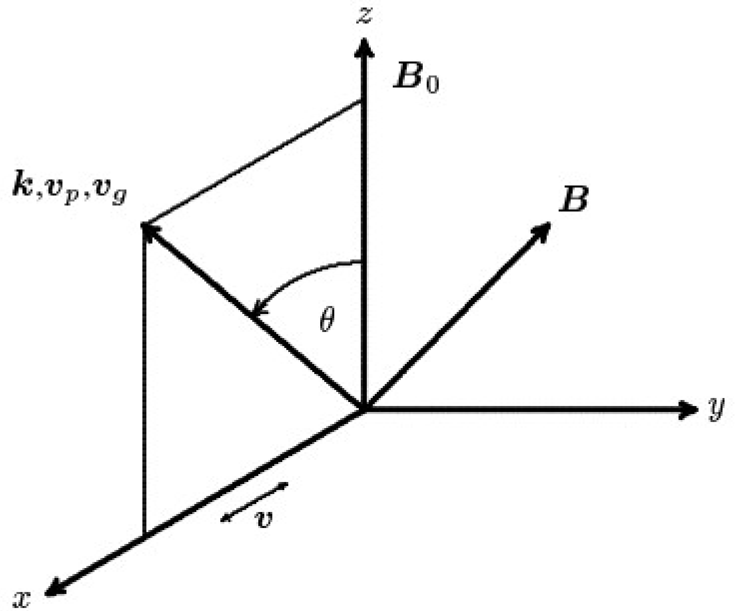
$$\tan\alpha = \frac{1}{v_p}\frac{\partial v_p}{\partial\theta} = 0 \qquad \Rightarrow \alpha = 0$$

Analog zur torsional Alfén Wave

$$\vec{B} = \frac{\vec{k} \times \vec{E}}{\omega} = B_x \hat{e}_x + B_z \hat{e}_z$$

Poynting-Vektor:

$$\vec{s} = \frac{\vec{E} \times \vec{B}}{\mu_0} \propto \vec{k}$$



Alfvén-Wellen

Compressional (fast) Alfén Wave

Weiterhin

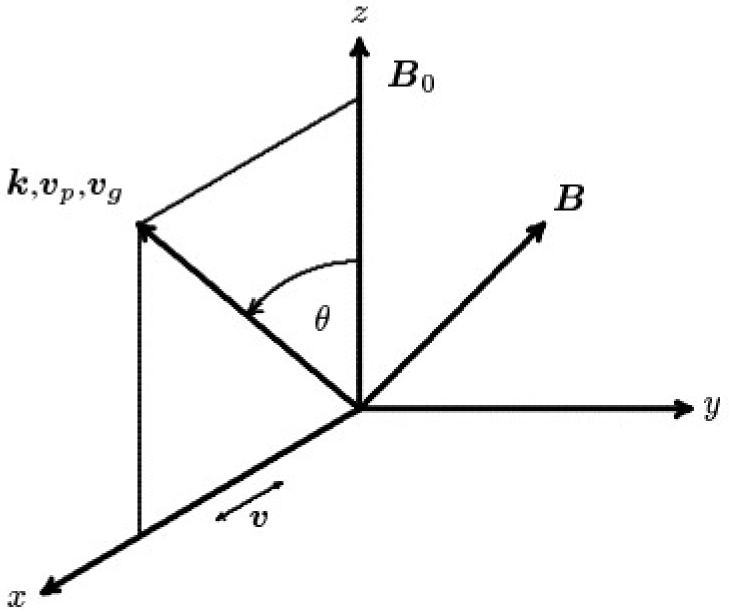
$$\vec{E} = \vec{v} \times \vec{B} \Rightarrow \vec{v} = \frac{E_y}{B_0} \hat{e}_x \Rightarrow \vec{k} \cdot \vec{v} \neq 0$$

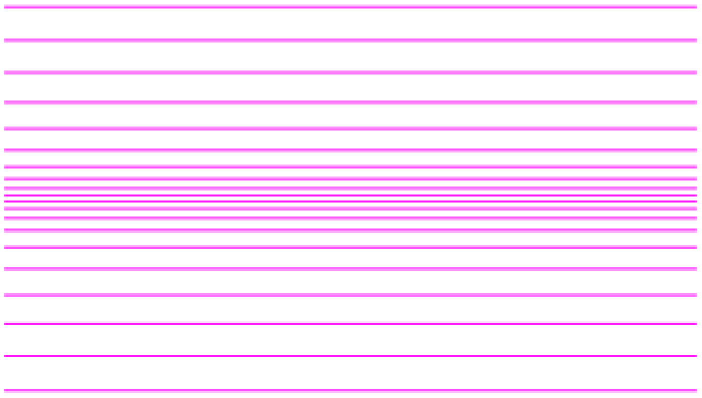
Analogie zu Schallwellen:
Magnetischer Druck:

$$p_m = \sqrt{\frac{B_0^2}{2\mu_0}}$$

Damit:

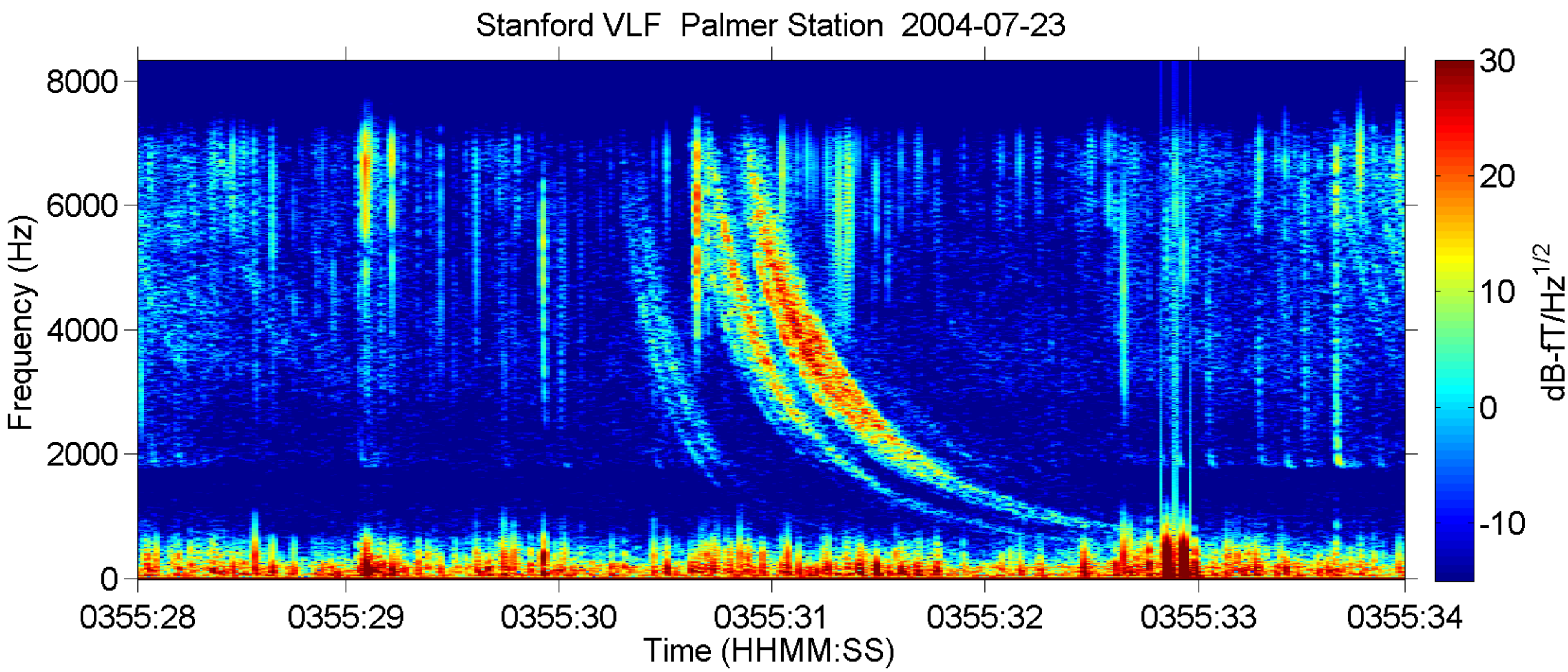
$$v_s = \sqrt{\frac{\gamma\, p}{\rho_m}} = v_A = \sqrt{\frac{\gamma\, B_0^2}{2\mu_0 \rho_m}}$$



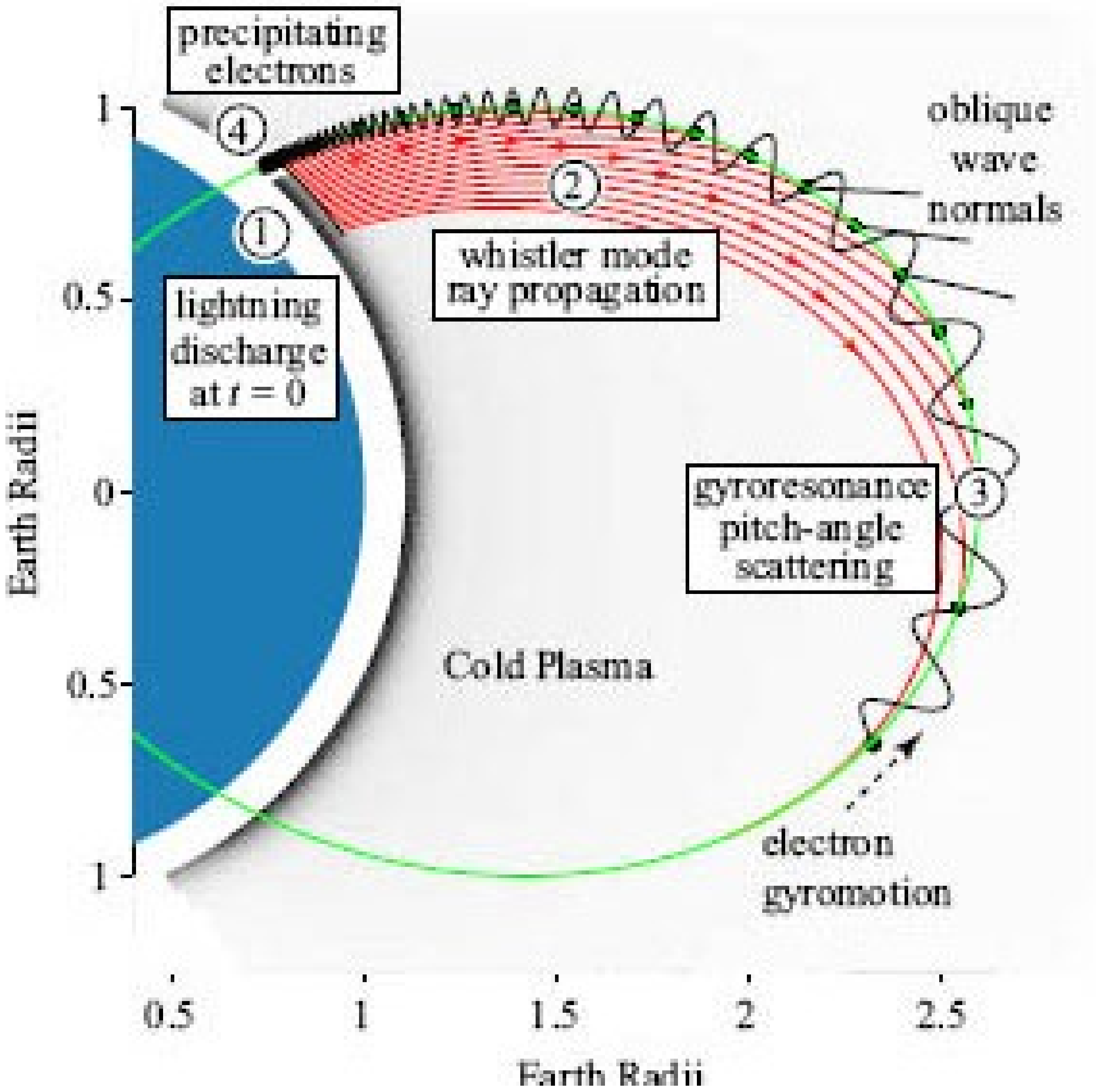


Field lines compression

Whistler Wellen



Whistler Wellen



Whistler Wellen

Mittlerer Frequenzbereich: $\omega_{ci} \ll \omega \ll \omega_{ce} \approx \omega_{pe}$ also zwischen lower und upper hybrid.

Wir betrachten zunächst die R-Welle:

$$n^2 = R = 1 - \frac{\omega_{pi}^2}{\omega(\omega + \omega_{ci})} - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega(\omega - \omega_{ce})} \approx 1 - \frac{\omega_{pi}^2}{\omega^2} + \frac{\omega_{pe}^2}{\omega\,\omega_{ce}} \approx \frac{\omega_{pe}^2}{\omega\,\omega_{ce}}$$

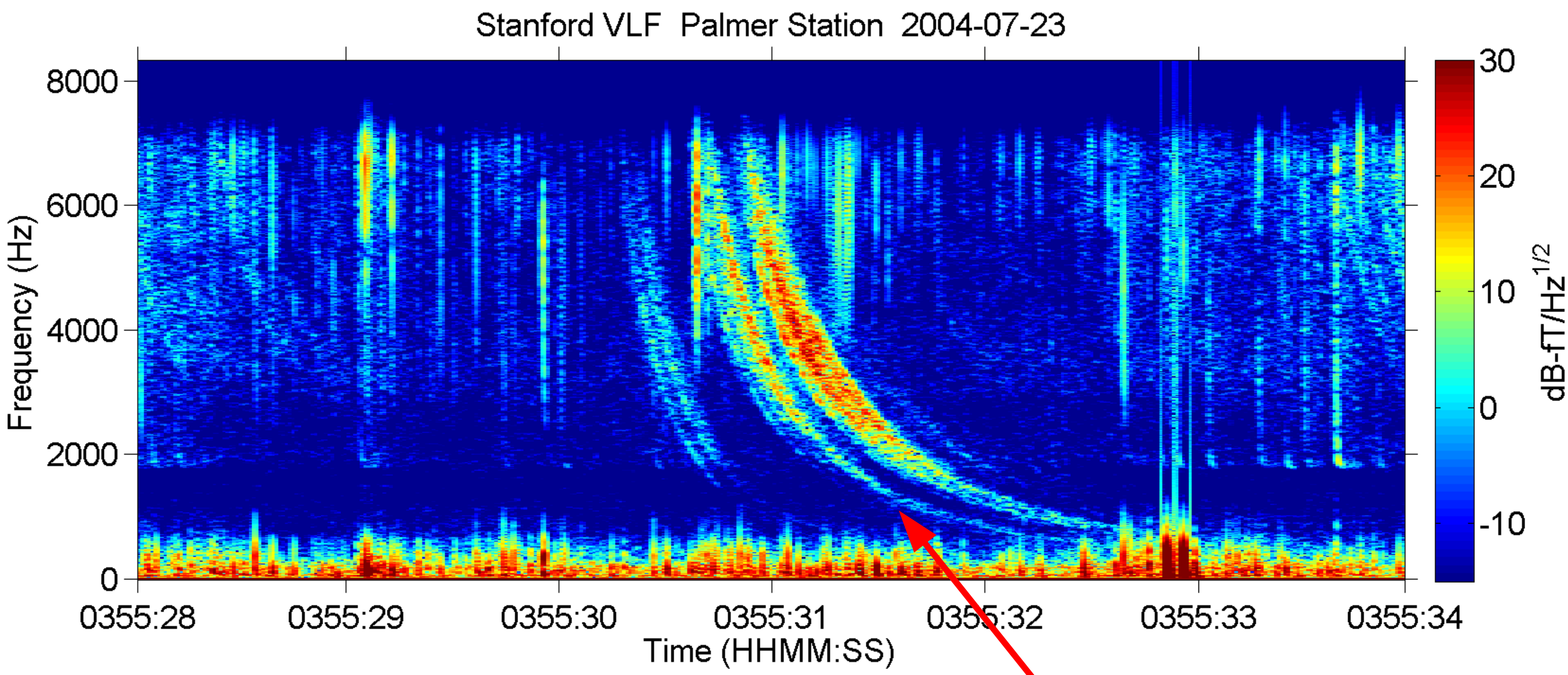
$$\Leftrightarrow \omega = k^2 c^2 \frac{\omega_{ce}}{\omega_{pe}^2}$$

Damit ist:

$$v_p = \frac{\omega}{k} = \frac{c}{n} = c\sqrt{\frac{\omega\,\omega_{ce}}{\omega_{pe}^2}} = \frac{k c^2 \omega_{ce}}{\omega_{pe}^2}$$

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} = 2c\sqrt{\frac{\omega\,\omega_{ce}}{\omega_{pe}^2}} = \frac{2 k c^2 \omega_{ce}}{\omega_{pe}^2} = 2 v_p$$

Whistler Wellen



Zeit-Frequenzverlauf nach Strecke L:

$$L = v_p t = c \sqrt{\frac{\omega \omega_{ce}}{\omega_{pe}^2}}\, t \Leftrightarrow \omega(t, L) = \left(\frac{L}{ct}\right)^2 \frac{\omega_{pe}^2}{\omega_{ce}} \propto \frac{1}{t^2}$$

Whistler Wellen

Propagationsrichtung:

$$K_{xx}=1-\frac{\omega_{pi}^2}{\omega^2-\omega_{ci}^2}-\frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2-\omega_{ce}^2}\simeq 1-\frac{\omega_{pi}^2}{\omega^2}+\frac{\omega_{pe}^2}{\omega_{ce}^2}$$

$$K_{xy}=\frac{i\,\omega_{pi}^2\,\omega_{ci}}{\omega\left(\omega_{ci}^2-\omega^2\right)}-\frac{i\,\omega_{pe}^2\,\omega_{ce}}{\omega\left(\omega_{ce}^2-\omega^2\right)}\simeq\frac{i\,\omega_{pe}^2}{\omega\,\omega_{ce}}$$

$$K_{zz}=1-\frac{\omega_{pi}^2+\omega_{pe}^2}{\omega^2}$$

So dass: $|K_{zz}|\gg|K_{xy}|\gg|K_{xx}|$

In der Wellengleichung setzen wir also direkt $E_z=0$

Es verbleibt:

$$\begin{vmatrix} K_{xx}-n^2\cos^2\theta & K_{xy} \\ -K_{xy} & K_{xx}-n^2 \end{vmatrix}=0$$

Whistler Wellen

Oder: $$n^4 \cos^2\theta = -K_{xy}^2 ,$$ solange nicht $\theta \approx \frac{\pi}{2}$

Hiermit erhalten wir:

$$\omega = \frac{k^2 c^2 \omega_{ce} \cos\theta}{\omega_{pe}^2}$$

Für den Propagationswinkel der Gruppengeschwindigkeit ergibt sich:

$$\tan\alpha = \frac{\frac{1}{k}\frac{\partial\omega}{\partial\theta}_k}{\frac{\partial\omega}{\partial k}_\theta} = \frac{-kc^2\omega_{ce}\sin\theta/\omega_{pe}^2}{2kc^2\omega_{ce}\cos\theta/\omega_{pe}^2} = -\frac{1}{2}\tan\theta$$

v_g liegt also immer zwischen B_0 und v_p . Für den Winkel zwischen B_0 und v_g :

$$\tan(\theta+\alpha) = \frac{\tan\theta}{2+\tan^2\theta}$$

Whistler Wellen

Das Maximum liegt bei $\tan^2\theta = 2$

also: $$\tan(\theta+\alpha)_{max} = \frac{\sqrt{2}}{2+2} = \frac{1}{\sqrt{8}}$$

und damit $\theta+\alpha = 19.5^\circ$

Anwendung: Helicon

Zuerst erwähnt von Boswell (1970). Helicon-Wellen sind propagierende Whistler-Wellen in einem Plasma mit finitem Durchmesser, sie sind niederfrequent und breiten sich bei niedrigem Magnetfeld und hoher Dichte aus:

$$\omega_{LH} \ll \omega \ll \omega_{ce}$$

$$\omega_{pe}^2 \gg \omega\,\omega_{ce}$$

Obwohl aufgrund der Randbedingungen eine komplexe Modenstruktur vorliegen kann, gilt die einfache Whistler-Dispersionsrelation:

$$\omega = \frac{k^2 c^2 \omega_{ce} \cos\theta}{\omega_{pe}^2} \Leftrightarrow \frac{k k_z}{k_0^2} = \frac{\omega_{pe}^2}{\omega\,\omega_{ce}}$$

mit $k = \sqrt{k_\perp^2 + k_z^2}$, $k k_z = k^2 \cos\theta$ und $k_0 = \frac{\omega}{c}$

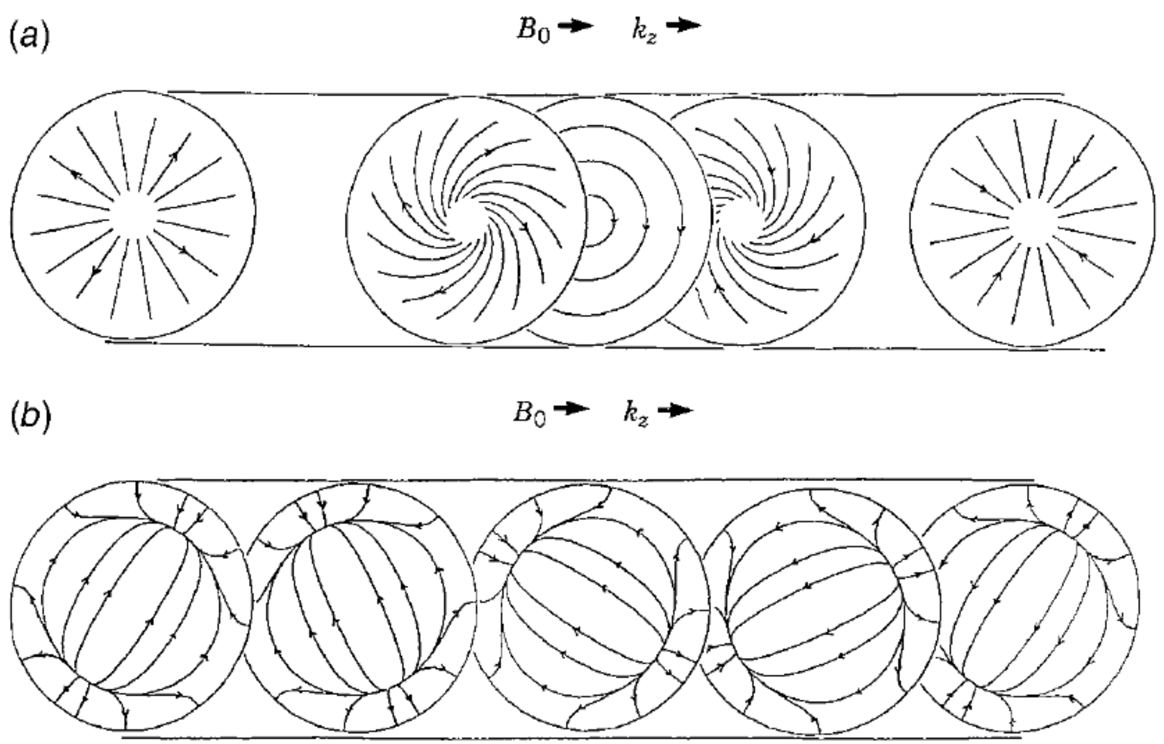
Anwendung: Helicon

Zylindersymmedrie: Wellengleichung wird durch einen Bessel-Ansatz gelöst:

$$X \propto \sum_m J_m(k_\perp r) e^{i(k_z z + m\theta - \omega t)}$$

Die Randbedingungen $j_r = 0$ bzw. $E_\theta = 0$ bei r=R liefern:

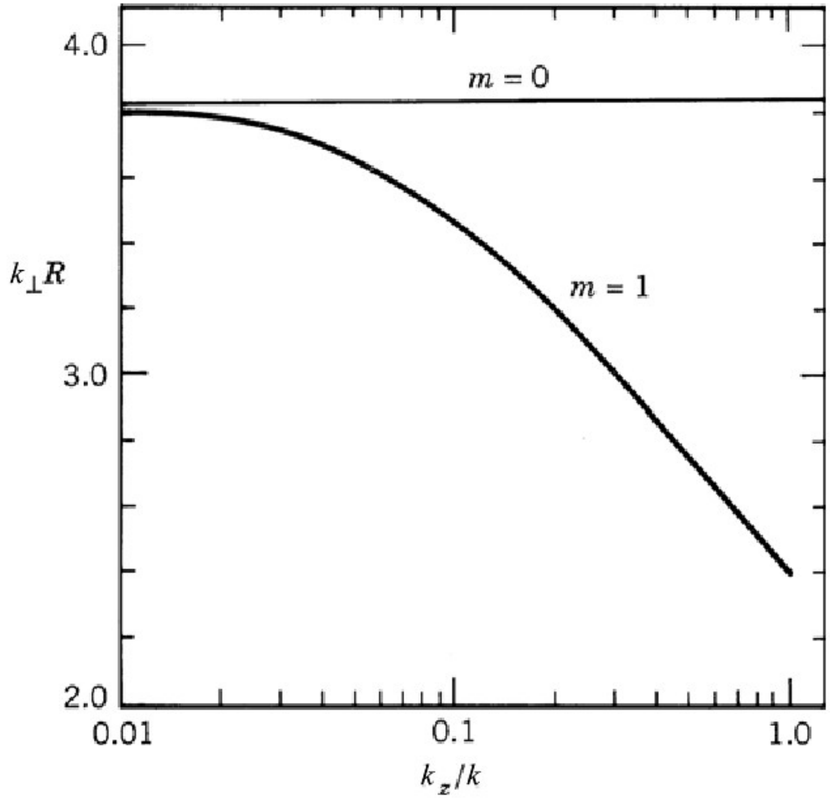
$$m k J_m(k_\perp R) + k_z J'_m(k_\perp R) = 0$$

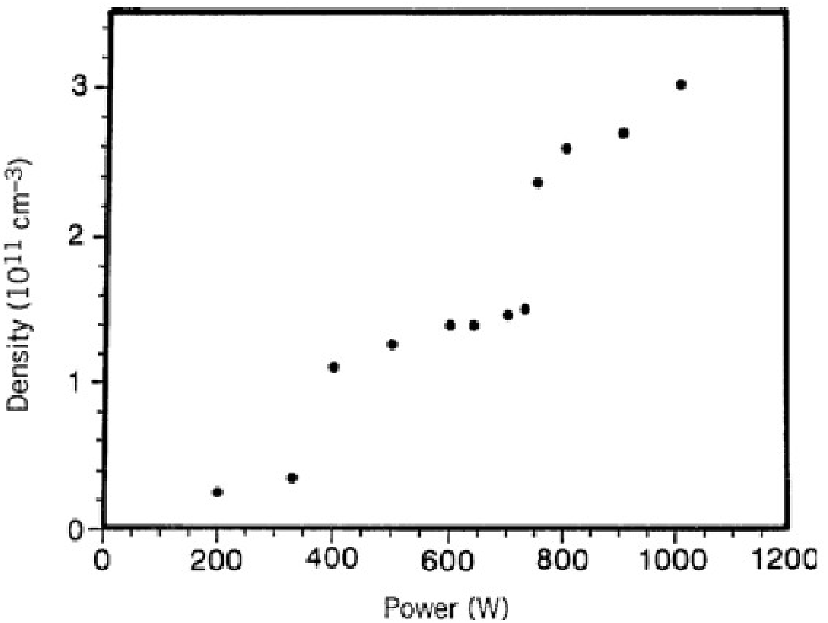


$m = 0$

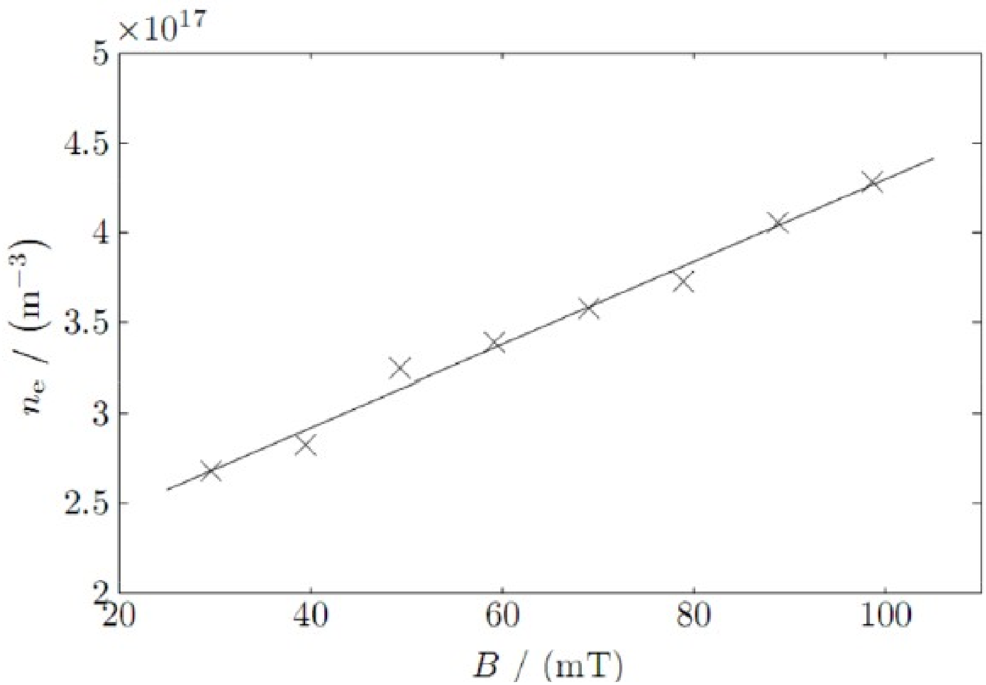
$m = 1$

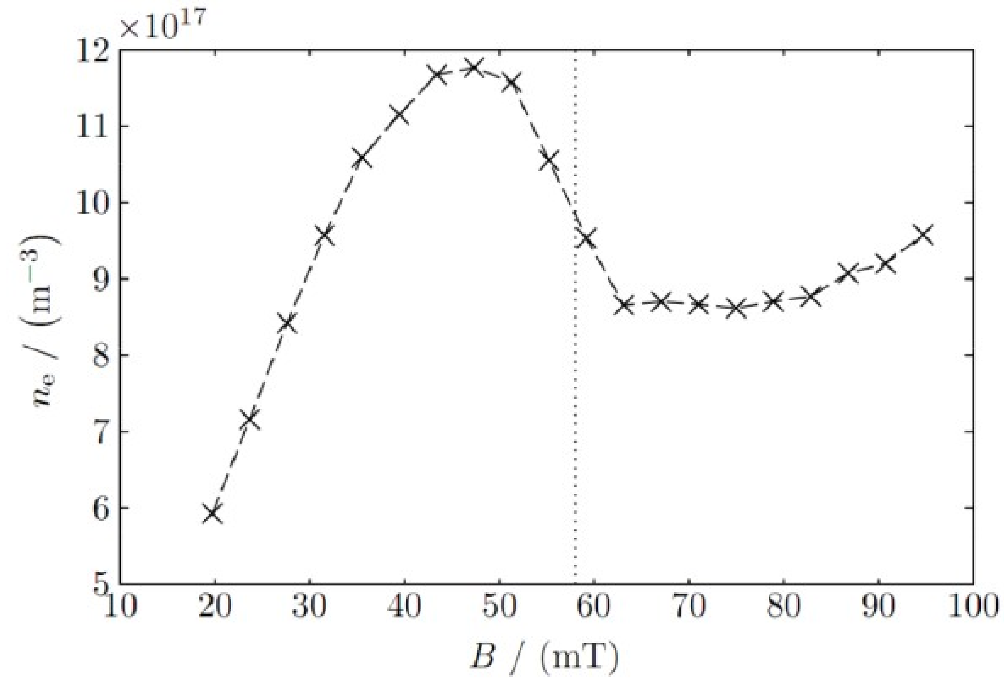
Anwendung: Helicon

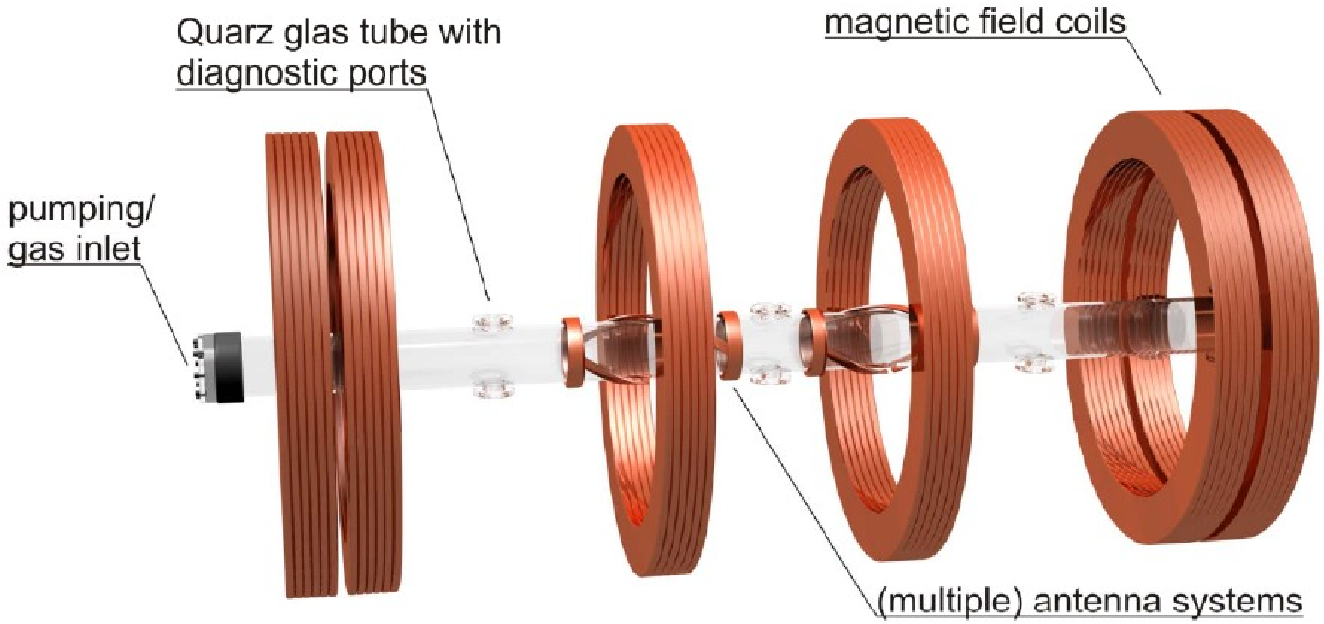




Anwendung: Helicon







Diagnostik: Interferometrie

Wir konzentrieren uns auf hochfrequente Wellen (µ-Welle, (F)IR und sichtbares Licht)
→ Dispersionsrelation für den unmagnetisierten Fall.

$$\omega^2 = k^2 c^2 + \omega_p^2 \qquad \text{bzw.} \qquad n = \frac{c}{v_p} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2}}}$$

Für $\omega_{pe}^2 \ll \omega^2$ lässt sich die Wurzel entwickeln:

$$n \approx 1 - \frac{1}{2}\frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2} = 1 - \frac{e^2}{2\epsilon_0 m \omega^2} n_e$$

Eine Welle erfährt beim Durchlauf durch ein Plasma also eine Änderung der optischen Weglänge:

$$\Delta z = \int_0^L n_{vakuum} - n_{pl} \, dl$$

Diagnostik: Interferometrie

Diese lässt sich in eine Phasenverschiebung umrechnen:

$$\Delta\varphi = r_e \lambda \int_0^L n_e \, dl \qquad \text{mit } r_e = \frac{e^2}{4\pi c^2 \epsilon_0 m_e}$$

Die messbare Phasenverschiebung ist also direkt proportional zur linienintegrierten Elektronendichte.

Berechnung der gemessenen Intensität: Überlagerung zweier Wellen mit Phasenverschiebung:

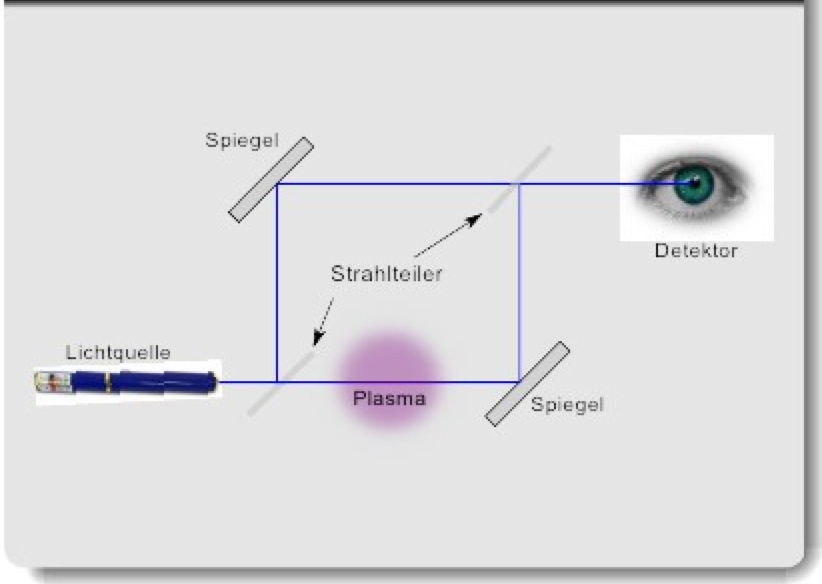
$$I = \langle (E_1 \cos(kx - \omega t) + E_2 \cos(kx - \omega t + \Delta\varphi))^2 \rangle_t$$

$$I = \langle E_1^2 \cos^2(kx - \omega t) \rangle_t + \langle E_2^2 \cos^2(kx - \omega t + \Delta\varphi) \rangle_t + \langle 2 E_1 E_2 \cos(kx - \omega t) \cos(kx - \omega t + \Delta\varphi) \rangle_t$$

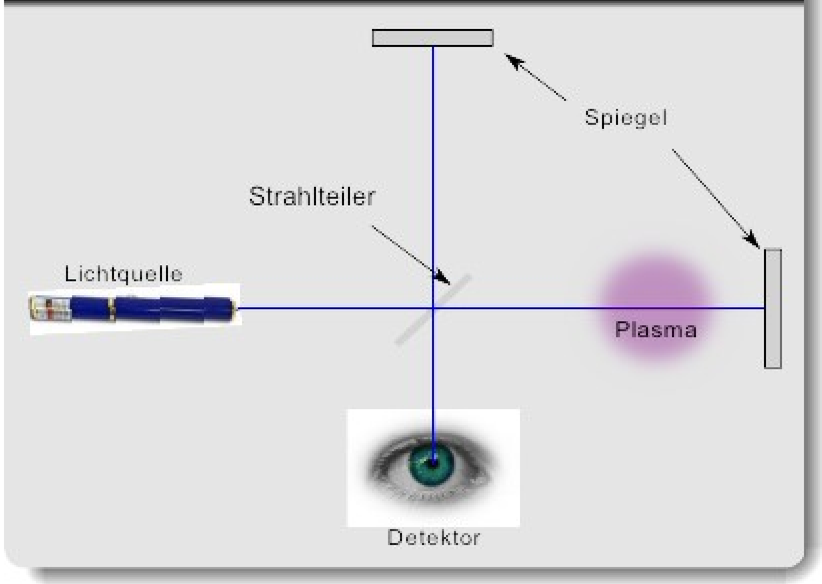
$$I = \frac{E_1^2}{2} + \frac{E_2^2}{2} + E_1 E_2 \cos\Delta\varphi$$

Diagnostik: Interferometrie

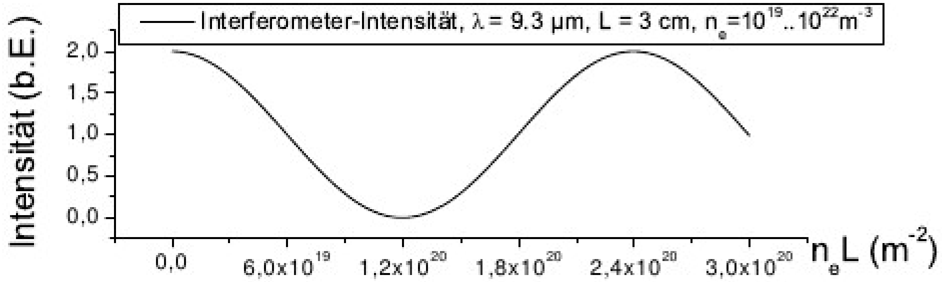
Mach-Zehnder



Michelson

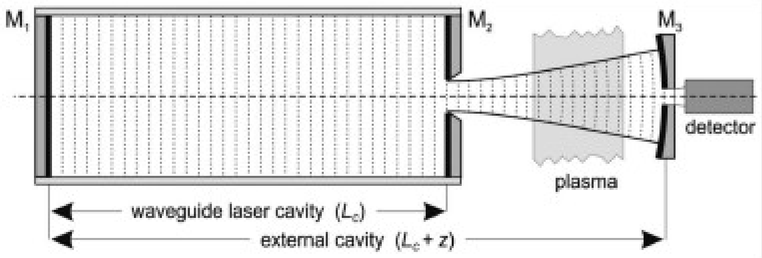


Gemessene Intensität als Funktion der Phasenverschiebung: $I = A\cos(\Delta\Phi(n_e)) + B$

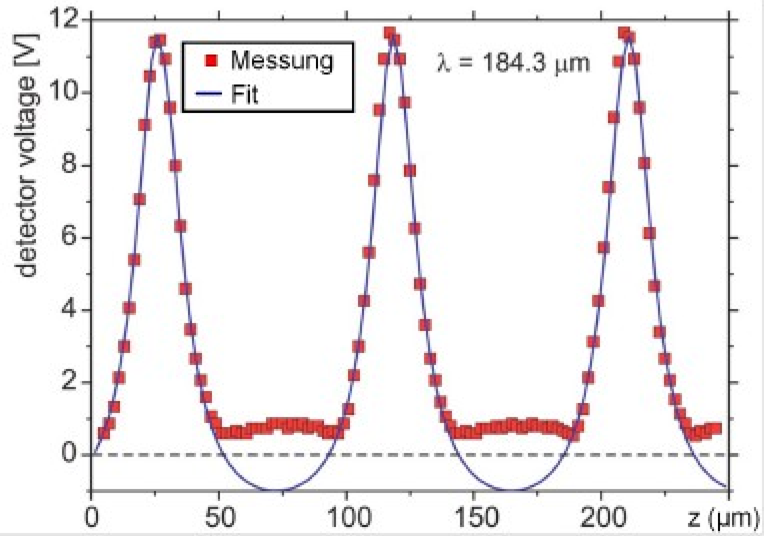


Diagnostik: Interferometrie

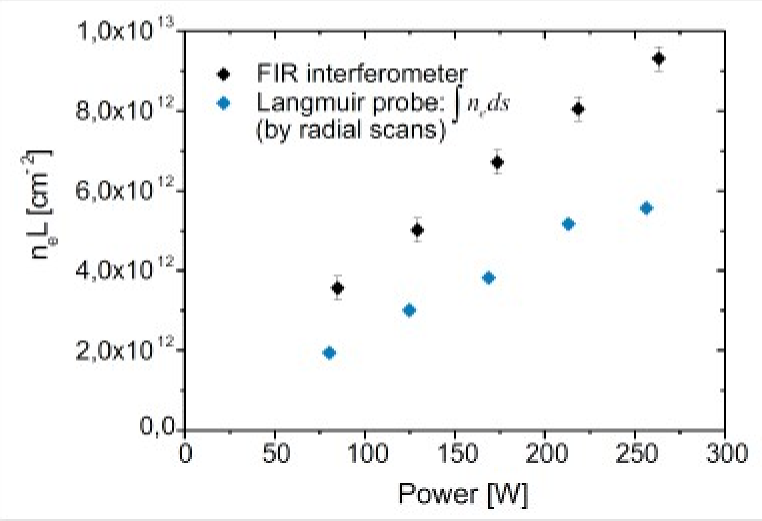
Coupled-/nested-cavity[1]



$$I(z) = \frac{A}{1+K\,\sin^2(kz)} - B, \;\; kz = \Delta\Phi$$



Gemessene Elektronendichte, RF-ICP[2]



- (+) Hohe Empfindlichkeit
- (-) Zeitauflösung durch Einschwingverhalten des Resonators bestimmt (Hier: ≈10 μs)

[1] C. Pargmann, S.V. Singh and H. Soltwisch, Rev. Sci. Instrum. **76** (2005), 113506

[2] C. Pargmann, S.V. Singh, P. Kempkes and H. Soltwisch, Poster P7.19, DPG-Frühjahrstagung 2005