420811

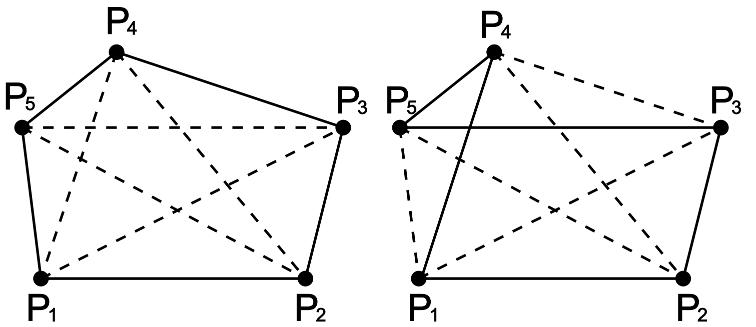
Angenommen, anfangs waren n Exemplare vorhanden. Am ersten Tag wurden $\left(\frac{n}{8}+10\right)$ Exemplare verkauft. Es verblieb ein Rest von $\left[n-\left(\frac{n}{8}+10\right)\right] = \left(\frac{7}{8}n-10\right)$ Exemplaren.
Am zweiten Tag wurden $\left[\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{7}{8}n-10\right)+15\right] = \left(\frac{7}{16}n+10\right)$ Exemplare verkauft.
Nun gilt

$$\begin{aligned} n &= \left(\frac{n}{8}+10\right)+\left(\frac{7}{16}n+10\right)+50 \text{ bzw.}\\ n &= \frac{9}{16}n+70 \text{ bzw.}\\ \frac{7}{16}n &= 70 \text{ und somit } n = 160\,. \end{aligned}$$

Anfangs wurden 160 Exemplare des Romans angeboten.
Lösungsvariante:
Laut Voraussetzung gab es nach dem zweiten Tag einen Restbestand von 50 Büchern. Zusammen mit den 15 Büchern, die zusätzlich am zweiten Tag verkauft wurden, betrug somit die Hälfte des Restbestandes vom ersten Tag $(50+15=)65$ Bücher. Damit wurden am zweiten Tag insgesamt $(65+15=)80$ Exemplare verkauft. Zusammen mit den 10 Büchern, die am ersten Tag verkauft wurden, betrugen somit sieben Achtel des Anfangsbestandes $(50+80+10=)140$ Bücher. Daraus folgt, dass ein Achtel des Anfangsbestandes $(140:7=)20$ Bücher, der zu ermittelnde Anfangsbestand somit $(20\cdot 8=)160$ Bücher betrug.

420812

a) Durch Abzählen erhält man 10 Verbindungsstrecken und 10 Dreiecke der verlangten Art. Folgende Beispiele zeigen, dass es möglich ist, die zu den Eckpunkten eines Fünfecks gehörenden 10 Verbindungsstrecken so mit den Farben rot und blau zu färben, dass bei keinem der 10 Dreiecke (mit diesen Verbindungsstrecken als Seiten) alle drei Seiten gleich gefärbt sind.



b) Für jedes Sechseck gilt:

Von den 5 Verbindungsstrecken, die von P_1 ausgehen, müssen mindestens 3 Strecken gleich gefärbt werden, z.B. die Strecken P_1P_2, P_1P_3, P_1P_4 rot.

Damit die Seiten des Dreiecks $P_1P_2P_3$ nicht alle rot werden, muss P_2P_3 blau gefärbt werden.

Analog müssen auch die Strecken P_2P_4 und P_3P_4 blau gefärbt werden.

Dann ist jedoch das Dreieck $P_2P_3P_4$ einfarbig blau.

Damit ist gezeigt, dass im Fall eines Sechsecks (und erst recht eines n-Ecks mit $n>6$) beim Färben der Verbindungsstrecken mit zwei Farben stets mindestens ein einfarbiges Dreieck entsteht (s. Abb. b).

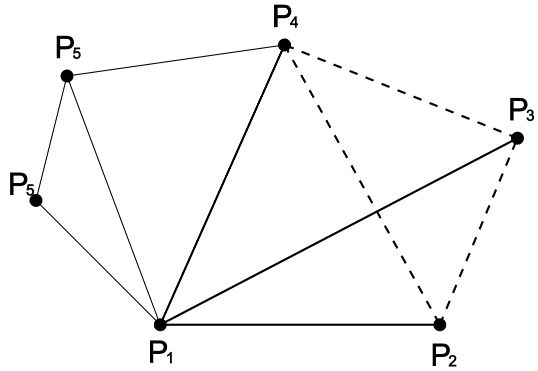


Abbildung b

<u>420813</u>
Zwischen 12 und 52 liegen folgende zehn Primzahlen:

$$13,\ 17,\ 19,\ 23,\ 29,\ 31,\ 37,\ 41,\ 43,\ 47\,.$$

Steffi und Thorsten müssen also immer abwechselnd eine dieser Anzahlen von Spielsteinen vom Häufchen nehmen. Thorsten kann erreichen, dass nach einem Zug von Steffi und dem anschließenden Zug von ihm immer genau 60 Spielsteine weggenommen werden, denn es gilt:

$$13+47=17+43=19+41=23+37=29+31=60\,.$$

Er erzwingt dies, indem er einfach die von Steffi weggenommene Zahl von Spielsteinen zu 60 ergänzt. Da zu Beginn des Spiels eine durch 60 teilbare Zahl von Spielsteinen (nämlich 780) vorhanden ist, kann Thorsten auf diese Weise nach je $780 : 60 = 13$ Zügen von beiden schließlich die letzten noch vorhandenen Spielsteine wegnehmen und das Spiel gewinnen.
Daher muss Steffi, wenn Thorsten wie beschrieben spielt, in jedem Fall verlieren.

<u>420814</u>

a) Die gesuchten Zahlenfolgen lauten:

(10, 03, 90); (11, 33, 99); (12, 63); (13, 93); (14, 24, 27, 18, 45); (15, 54).

b) Vermutlich gelten folgende Gesetzmäßigkeiten:

(1) Jede solche Folge enthält höchstens 5 Zahlen.

(2) Wenn $z_1 > 33$, dann besteht die Folge aus genau einer Zahl.
Wenn $z_1 \leq 33$ und $z_2 > 33$, dann besteht die Folge aus genau 2 Zahlen.
Wenn $z_1 \leq 33$, $z_2 \leq 33$ und $z_3 > 33$, dann besteht die Folge aus genau 3 Zahlen; usw.

(3) Die Zahl z_2 ist stets durch 3 teilbar; die Zahlen $z_3, z_4, \ldots$ sind stets durch 9 teilbar.

c) Da es nur endlich viele zweistellige Zahlen gibt, die als Anfangsglied z_1 der Folge gewählt werden dürfen, lassen sich die vermuteten Gesetzmäßigkeiten beweisen, indem man alle Folgen ermittelt und sich überzeugt, dass für jede dieser Folgen diese Gesetzmäßigkeiten zutreffen. Da dies recht umständlich ist, wollen wir nicht so vorgehen. Die Gesetzmäßigkeit (2) folgt unmittelbar aus dem Bildungsgesetz für diese Folgen, da für $z_i > 33$ die Zahl $3 \cdot z_i$ dreistellig wird und daher z_i das letzte Glied der Folge ist. Da $3 \cdot z_1$ stets durch 3 teilbar ist und da durch das Vertauschen von Ziffern die Teilbarkeit durch 3 nicht verändert wird, ist auch z_2 stets durch 3 teilbar. Wenn z_2 durch 3 teilbar ist, dann ist $3 \cdot z_2$ durch 9 teilbar, und da durch das Vertauschen von Ziffern die Teilbarkeit durch 9 nicht verändert wird, ist auch z_3 stets durch 9 teilbar.

Beachte: Zwar ist $3 \cdot z_3$ stets durch 27 teilbar, für z_4 muss dies jedoch nicht zutreffen, weil durch das Vertauschen von Ziffern die Teilbarkeit durch 27 nicht erhalten bleiben muss. Damit ist die Gesetzmäßigkeit (3) bewiesen.
Dass es mindestens eine Folge mit 5 Gliedern gibt, wurde im Teil a) bereits nachgewiesen. Nun muss noch gezeigt werden, dass es keine Folgen mit mehr als 5 Gliedern geben kann. Da z_3 stets eine durch 9 teilbare zweistellige Zahl ist, kann nur $z_3 = 18, 27, 36, \ldots, 99$ gelten.

Für $z_3 \geq 36$ gilt $z_3 > 33$, folglich endet die Folge mit z_3.

Für $z_3 = 18$ gilt $z_4 = 45 > 33$ und die Folge endet mit z_4.

Für $z_3 = 27$ gilt $z_4 = 18$ und $z_5 = 45 > 33$, die Folge endet daher mit z_5.

Damit haben wir die Gesetzmäßigkeit (1) aus (3) und (2) abgeleitet und folglich auch bewiesen.