



Aufgabenausschuss des Mathematik-Olympiaden e. V.

## 42. Mathematik-Olympiade

### 1. Stufe (Schulrunde)

Klasse 9 und 10

### Aufgaben

Hinweis: Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.

#### 421011

Aus dem nachfolgenden Schema soll eine richtig gelöste Additionsaufgabe entstehen, indem alle Großbuchstaben mit Ziffern belegt werden, verschiedene Großbuchstaben bedeuten verschiedene, gleiche Großbuchstaben bedeuten gleiche Ziffern:

$$\begin{array}{rcccccc} & & T & I & E & R & \\ + & & B & A & U & M & \\ \hline L & E & B & E & N & & \end{array}$$

Eine geeignete Belegung heißt Lösung der Aufgabe. Zwei Lösungen sind dann voneinander verschieden, wenn sie sich in der Belegung für mindestens einen Großbuchstaben unterscheiden.

Beweisen Sie, dass es mindestens vier verschiedene Lösungen gibt!

#### 421012

Die Werbung auf einem Nachfüllpack, dessen Inhalt zum zweimaligen Nachfüllen der Originalverpackung reicht, verspricht: „Sie sparen 75% Verpackungsmaterial.“

- Weisen Sie nach, dass diese Werbung nicht in folgender Bedeutung zutreffen kann: „Es werden 75% des Verpackungsmaterials eingespart, wenn jemand anstelle von drei Originalpackungen nur eine Originalpackung und dazu ein Nachfüllpack kauft.“
- Die Lösung von a) lässt vermuten, dass die Werbung in folgendem Sinn zutrifft: „Wenn man anstelle von zwei Originalpackungen ein Nachfüllpack kauft, werden 75% des Verpackungsmaterials eingespart.“

Ermitteln Sie unter dieser Annahme, wieviel Prozent des Verpackungsmaterials eingespart werden, wenn man statt fünf Originalpackungen nur eine und dazu zwei Nachfüllpacks kauft.

#### 421013

In einem Quadrat ist jeder der vier Eckpunkte mit den beiden Seitenmitten der nicht anliegenden Seiten verbunden. Die acht Verbindungsstrecken schneiden ein Achteck aus. Wie groß ist der Anteil des Achtecks an der Gesamtfläche des Quadrats?

421014

Im Land der Schildbürger sind nur 2 Münztypen im Umlauf: 19-Schilling-Münzen und 80-Schilling-Münzen. Schillo beklagt sich: Ich kann etwas, das 8 Schilling oder das 98 Schilling kostet, nicht bezahlen.

- a) Hat Schillo recht?
- b) Welche ganzzahligen Beträge können bezahlt werden?

*Hinweis:* Ein Geldbetrag kann auch bezahlt werden, indem der Zahler einen Betrag gibt, auf den der Empfänger passend herausgeben kann.

421015

Ein *Stammbruch* ist eine rationale Zahl der Form  $\frac{1}{n}$ , wobei  $n$  eine von null verschiedene natürliche Zahl ist.

Es gibt rationale Zahlen der Form  $\frac{a}{b}$  mit  $0 < a < b$ , die sich weder als Stammbruch noch als Summe zweier Stammbrüche schreiben lassen. Bestimmen Sie unter allen diesen Zahlen diejenige oder diejenigen, für die die Summe  $a + b$  den kleinstmöglichen Wert annimmt. (Dabei sollen  $a$  und  $b$  natürliche Zahlen sein.)

421016

Thomas versucht, das graphische Bild der Funktion

$$f(x) = x^2 + \sqrt{x^4 + 1} + \frac{1}{x^2 - \sqrt{x^4 + 1}} \quad (1)$$

zu ermitteln, indem er für  $x$  zehn verschiedene reelle Zahlen in (1) einsetzt. Das Resultat verwundert ihn.

- a) Was könnte Thomas verwundert haben?
- b) Bestimmen Sie Definitions- und Wertebereich der Funktion  $f$ .