



42. Mathematik-Olympiade

1. Stufe (Schulrunde)

Klasse 8

Aufgaben

Hinweis: Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.

420811

Eine Buchhandlung verkaufte von den vorhandenen Exemplaren eines neu erschienenen Romans am ersten Tag den achten Teil und 10 Stück, am zweiten Tag vom Restbestand die Hälfte und noch 15 Stück. Es verblieben danach noch 50 Exemplare. Wie viele Exemplare wurden anfangs zum Verkauf angeboten?

420812

- a) Überzeuge dich, dass es zwischen den 4 Eckpunkten P_1, P_2, P_3, P_4 eines Vierecks genau 6 Verbindungsstrecken $\overline{P_1P_2}, \overline{P_1P_3}, \overline{P_1P_4}, \overline{P_2P_3}, \overline{P_2P_4}, \overline{P_3P_4}$ gibt und dass es genau 4 Dreiecke $P_1P_2P_3, P_1P_2P_4, P_1P_3P_4, P_2P_3P_4$ gibt, die diese Verbindungsstrecken als Seiten besitzen!

Zeichne ein konvexes Fünfeck $P_1P_2P_3P_4P_5$!

Wie viele Verbindungsstrecken gibt es zwischen den 5 Eckpunkten?

Wie viele Dreiecke mit diesen Verbindungsstrecken als Seiten gibt es?

Zeige, dass es möglich ist, diese Verbindungsstrecken so mit den Farben rot und blau zu färben, dass es kein Dreieck gibt, dessen Seiten alle mit der gleichen Farbe gefärbt sind!

- b) Betrachte ein konvexes Sechseck!

Zeige, dass es in diesem Fall stets mindestens ein Dreieck gibt, dessen Seiten alle mit der gleichen Farbe gefärbt sind!

Hinweis: Ein n -Eck heißt konvex, wenn alle Innenwinkel dieses n -Ecks kleiner als 180° sind.

420813

Steffi und Thorsten spielen ein Nimm-Spiel. Das geht so:

Beide nehmen abwechselnd p Spielsteine von einem Häufchen; dabei muss p eine Primzahl mit $12 < p < 52$ sein. Das Spiel wird mit 780 Spielsteinen begonnen; Steffi fängt an. Wer den letzten Spielstein wegnimmt, gewinnt das Spiel. Gelingt das keinem von beiden, endet das Spiel unentschieden.

Zeige, dass Steffi bei optimaler Spielweise von Thorsten verlieren muss!

420814

Max bildet Zahlenfolgen von zweistelligen Zahlen nach folgender Regel:

Die erste Zahl einer solchen Folge ist eine Zahl z_1 . Man multipliziert z_1 mit 3.

Ist das Ergebnis dreistellig, dann ist die Zahlenfolge zu Ende und besteht nur aus z_1 .

Ist das Ergebnis aber zweistellig, dann werden die beiden Ziffern von $3 \cdot z_1$ vertauscht und die so entstandene Zahl wird z_2 genannt. (Sollte z_n eine einstellige Zahl sein, dann wird sie als zweistellige Zahl mit der Zehnerstelle 0 geschrieben.)

Mit z_2 verfährt man jetzt genauso. Ist $3 \cdot z_2$ dreistellig, dann ist die Folge mit z_2 zu Ende. Ist aber $3 \cdot z_2$ zweistellig, dann erhält man z_3 , indem man bei $3 \cdot z_2$ die Ziffern vertauscht.

Analog bildet man die weiteren Zahlen z_4, z_5, \dots einer solchen Folge.

- a) Ermittle die sechs Zahlenfolgen, die zu den Zahlen $z_1 = 10$ bis $z_1 = 15$ gehören!
- b) Äußere Vermutungen über hierbei auftretende Gesetzmäßigkeiten! Achte dabei auf die Anzahl der Glieder einer solchen Folge sowie auf Teilbarkeitseigenschaften und die Größe der Zahlen einer solchen Folge!
- c) Versuche, die entdeckten Gesetzmäßigkeiten zu beweisen!