Ruhr-Universität Bochum

DISKRETE MATHEMATIK

für

ELEKTROTECHNIKER

Vorlesungsskript

von

Dr.G.Felbecker und Dr.G.Renckhoff

Inhaltsverzeichnis

Literaturverzeichnis

Aigner: Diskrete Mathematik

Beutelspacher/Zschiegner: Diskrete Mathematik für Einsteiger

Nitsche: Graphen für Einsteiger

Tittmann: Graphentheorie

Steger: Diskrete Strukturen

Jordan/Smith: Mathematical Techniques

Lipschitz: Wahrscheinlichkeitsrechnung

Spiegel: Statistik

I Grundbegriffe aus der Algebra

Definition 1.1 : Gruppe

Eine **Gruppe** $(G, *)$ besteht aus einer Menge $G \neq \emptyset$ und einer Abbildung $* \,:\, G \times G \to G$ mit den Eigenschaften

(1) $(x * y) * z = x * (y * z)$ für alle $x, y, z \in G$ *(Assoziativgesetz)*

(2) Es existiert ein $e \in G$ mit $e * x = x * e = x$ für alle $x \in G$
e heißt *neutrales Element*

(3) Zu jedem $x \in G$ existiert ein $y = x^{-1} \in G$ mit $x * y = y * x = e$
$y = x^{-1}$ heißt zu x *inverses Element.*

Bemerkung 1.2 :

(1) e ist eindeutig bestimmt, denn
aus $x * e = e * x = x$ und $x * e' = e' * x = x$ für alle $x \in G$ folgt $e = e * e' = e'$.

(1) Das Inverse von x ist ebenfalls eindeutig bestimmt, denn
aus $x * y = y * x = e$ und $x * y' = y' * x = e$ folgt $y = e * y = (y' * x) * y = y' * (x * y) = y' * e = y'$.

(3) Wegen Eigenschaft (1) (Assoziativgesetz) können Klammern weggelassen werden.

Beispiel 1.3 :

a) $(\mathbb{Z}, +)$, $(\mathbb{Q}, +)$, $(\mathbb{R}, +)$, $(\mathbb{C}, +)$

b) $(\mathbb{Q}\backslash\{0\}, \bullet)$, $(\mathbb{R}\backslash\{0\}, \bullet)$, $(\mathbb{C}\backslash\{0\}, \bullet)$

sind Gruppen.

Definition 1.4 : Sei $(G, *)$ eine Gruppe.

(1) Gilt für alle $x, y \in G$: $x * y = y * x$, so heißt G **kommutativ** oder **abelsch**.

(2) Ist $|G|$ (Anzahl der Elemente von G) endlich, so heißt $(G, *)$ **endliche Gruppe**.

(3) Eine Teilmenge $U \subset G$ heißt **Untergruppe** von G, wenn gilt
  (a) mit $x, y \in U$ ist auch $x * y \in U$
  (b) mit $x \in U$ ist auch $x^{-1} \in U$.

Bemerkung 1.5 :

(1) Ist U Untergruppe von G, so gilt: $e \in U$, denn
mit x ist auch x^{-1} und damit $e = x * x^{-1} \in U$.

(2) Eine Untergruppe ist selbst eine Gruppe.

Beispiel 1.6 :

a) $(\mathbb{Z}, +) \subset (\mathbb{Q}, +) \subset (\mathbb{R}, +) \subset (\mathbb{C}, +)$

b) $(\mathbb{Q}\backslash\{0\}, \bullet) \subset (\mathbb{R}\backslash\{0\}, \bullet) \subset (\mathbb{C}\backslash\{0\}, \bullet)$

Beispiel 1.7 : Sei $M \neq \emptyset$ eine Menge, $G = \{f : M \to M \ , \ f \text{ bijektiv}\}$,
$*$ sei die Komposition $\circ$. Für $f, g \in G$ gilt $(f \circ g)(x) = f(g(x))$ für alle $x \in M$.
Dann ist $(G, \circ)$ eine nichtkommutative Gruppe, denn:

mit $f, g \in G$ ist auch $(f \circ g) \in G$ (die Komposition bijektiver Abbildungen ist wieder bijektiv),
$((f \circ g) \circ h)(x) = (f \circ g)(h(x)) = f(g(h(x))) = (f(g \circ h))(x) = (f \circ (g \circ h))(x) \ , \ x \in M$,
$e(x) = x \ , \ x \in M$ Identität, denn
$(e \circ f)(x) = e(f(x)) = f(x)$ und $(f \circ e)(x) = f(e(x)) = f(x)$,
das inverse Element von f ist die Umkehrabbildung f^{-1}, denn
$(f \circ f^{-1})(x) = f(f^{-1}(x)) = x \ , \ (f^{-1} \circ f)(x) = f^{-1}(f(x)) = x \ , \ x \in M$,
insbesondere gilt: $(f \circ g)^{-1} = (g^{-1} \circ f^{-1})$, denn
$(f \circ g) \circ (g^{-1} \circ f^{-1})(x) = f(g(g^{-1}(f^{-1}(x)))) = f(f^{-1}(x)) = x \ , \ x \in M$.

Beispiel 1.8 : Sei $M^*_{n,n} = \{A : \text{reguläre } (n,n)\text{-Matrizen}\}$,
$*$ sei die Matrizenmultiplikation $\bullet$, dann ist $(M^*_{n,n}, \bullet)$ eine nichtkommutative Gruppe, denn:

jeder regulären (n,n)-Matrix ist eindeutig eine lineare bijektive Abbildung
$\varphi : I\!R^n \to I\!R^n$ zugeordnet, wobei der Matrizenmultiplikation die Komposition der Abbildungen entspricht und damit nach Beispiel 1.7 die Gruppeneigenschaften erfüllt sind.

Beispiel 1.9 : Permutationsgruppe

Sei $M = \{1, 2, \ldots, n\}$, $n \in I\!N$, $G = \{f : \ M \to M \ , \ \text{bijektiv}\}$, $\circ$ die Komposition, dann heißt
$S_n = (G, \circ)$ die Permutationsgruppe von M.

Bezeichnung : Sei $f : \ M \to M$ bijektiv mit $f(i) = k_i \ , \ 1 \leq i \leq n$, also
$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \ldots & n \\ k_1 & k_2 & k_3 & k_4 & \ldots & k_n \end{pmatrix}$, so heißt $(k_1, k_2, \ldots, k_n)$ eine Permutation von $(1, 2, \ldots, n)$. $(k_1, k_2, \ldots, k_n)$ ist ein n-Tupel aus den Zahlen $1, 2, \ldots, n$, das keine 2 gleichen Zahlen enthält. Offenbar ist f vollständig durch $f = (k_1, k_2, \ldots, k_n)$ beschrieben.

Definition 1.10 : Transposition, Fehlstand

(1) Eine Permutation, die genau 2 Zahlen vertauscht und alle übrigen fest läßt, heißt **Transposition**.

(2) Ein Paar k_i, k_j mit $i < j$ aber $k_i > k_j$ heißt **Fehlstand** von $(k_1, k_2, \ldots, k_n)$.

(3) Ist die Anzahl der Fehlstände einer Permutation *gerade* (bzw. *ungerade*), so heißt die Permutation *gerade* (bzw. *ungerade*).

(4) $sgn(p) = \begin{cases} 1 & \text{falls } p \text{ gerade Permutation} \\ -1 & \text{falls } p \text{ ungerade Permutation} \end{cases}$

Satz 1.11 : Eine Permutation ist genau dann ungerade, wenn bei jeder Darstellung von p durch Transpositionen $p = t_1 t_2 t_3 \ldots t_m$, (t_i Transpositionen), die Anzahl m ungerade ist.

Satz 1.12 : Die Anzahl der Permutationen einer n-elementigen Menge ist $n!$.

Beweis: Sei o.E. $M = \{1, 2, \ldots, n\}$,
für 1 gibt es n Möglichkeiten, für 2 gibt es $(n-1)$ Möglichkeiten, da 1 bereits festgelegt, für 3 gibt es $(n-2)$ Möglichkeiten, da $1, 2$ schon festgelegt, usw., für n gibt es nur noch eine Möglichkeit.

Oder Beweis durch vollständige Induktion:

Induktionsanfang: $M = \{1\} \Rightarrow P_1 = 1$ Möglichkeit.
$n \to n+1$: Es gelte für n Elemente $P_n = n!$, dann gilt für $M = \{1, 2, \ldots, n, n+1\}$: $(n+1)$ kann an $(n+1)$ Plätzen stehen, jedesmal gibt es für die übrigen n Elemente $n!$ Möglichkeiten, also insgesamt $P_{n+1} = (n+1)n! = (n+1)!$.

Definition 1.13 : Körper
Sei $K \neq \emptyset$ eine Menge, in der zwei Verknüpfungen $+$ und $\bullet$ definiert sind, so daß $(K, +)$ eine kommutative Gruppe mit neutralem Element 0 und $(K \backslash \{0\}, \bullet)$ ebenfalls eine kommutative Gruppe ist. Gilt dann noch für alle $x, y, z \in K$
$x \bullet (y+z) = x \bullet y + x \bullet z$ (Distributivgesetzt), so heißt K **Körper**.

Beispiel 1.14 :

(1) $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ sind Körper.

(2) $K = \{0, 1\}$ mit $0+0=0$, $0+1=1=1+0$, $1+1=0$,
$0 \bullet 1 = 0 = 1 \bullet 0$, $0 \bullet 0 = 0$, $1 \bullet 1 = 1$
ist ebenfalls ein Körper, in diesem Fall ein endlicher Körper.

Definition 1.15 : Ring
Sei $R \neq \emptyset$ eine Menge, in der zwei Verknüpfungen $+$ und $\bullet$ definiert sind, so daß $(K, +)$ eine Gruppe ist und bzgl. $\bullet$ nur das Assoziativgesetz sowie die Distributivgesetze $x \bullet (y+z) = x \bullet y + x \bullet z$ und $(x+y) \bullet z = x \bullet z + y \bullet z$ erfüllt sind, so heißt R **Ring**.

Ein Ring, in dem $\bullet$ kommutativ ist, heißt **kommutativer Ring**.

Gibt es ein neutrales Element e der Multiplikation mit $e \bullet x = x \bullet e = x$ für alle $x \in R$, so heißt R ein **Ring mit Eins**.

Ein kommutativer Ring mit Eins heißt **Integritätsbereich**, wenn aus $x \bullet y = 0$ folgt $x = 0$ oder $y = 0$.

Beispiel 1.16 :

(1) $(\mathbb{Z}, +, \bullet)$ ist Integritätsbereich.

(2) $(M_{n,n}, +, \bullet)$ ist Ring mit Eins $(M_{n,n}$ (n,n)-Matrizen).

Bemerkung : Aus einem Integritätsbereich I kann man durch *Quotientenbildung* immer einen Körper konstruieren, der I enthält, z.B. $(\mathbb{Z}, +, \bullet) \to (\mathbb{Q}, +, \bullet)$.

II Modulare Arithmetik

Definition 2.1 : Seien $x, y \in \mathbb{Z}$, $m \in \mathbb{N}$. x heißt **kongruent** y **modulo** m , in Zeichen: $x \equiv y (\text{mod } m)$, wenn $x - y$ durch m teilbar ist, also $x - y = km$, $k \in \mathbb{Z}$.

Satz 2.2 : $\equiv$ ist eine Äquivalenzrelation.
Beweis : a) $x \equiv x (\text{mod } m) \Leftrightarrow x - x = 0$ durch m teilbar
b) $x \equiv y (\text{mod } m) \Rightarrow x - y$ durch m teilbar $\Rightarrow y - x$ durch m teilbar $\Rightarrow y \equiv x (\text{mod } m)$
c) $x \equiv y (\text{mod } m)$ und $y \equiv z (\text{mod } m) \Rightarrow x - y$ und $y - z$ durch m teilbar
$\Rightarrow x - z = (x - y) + (y - z)$ durch m teilbar $\Rightarrow x \equiv z (\text{mod } m)$.

Definition 2.3 : Restklasse

Sei $a \in \mathbb{Z}$, $m \in \mathbb{N}$,
$[a] = \{x \in \mathbb{Z} \ : \ x \equiv a (\text{mod } m)\}$ heißt **Restklasse** von a modulo m.
a heißt Repräsentant, m heißt Modul.

Beispiel 2.4 : $m = 5$

$$\begin{aligned}[1] &= \{x \ : \ x - 1 \text{ durch 5 teilbar}\} = \{\ldots, -9, -4, 1, 6, 11, 16, \ldots\} \\ &= \{x \in \mathbb{Z} \ : \ x = 5l + 1 \ , \ l \in \mathbb{Z}\}\end{aligned}$$

$x \in [1] \Leftrightarrow$ Divisionsrest bei Division durch 5 ist 1 , analog
$x \in [2] \Leftrightarrow$ Divisionsrest bei Division durch 5 ist 2 , usw.

Bemerkung 2.5 : Falls der Divisionsrest von x bei Division durch m gleich r
$\Rightarrow x \equiv r (\text{mod } m) \Rightarrow x \in [r]$.
Also ist x kongruent zu einer der Zahlen $0, 1, 2, \ldots, m - 1$.
Es gibt also m Restklassen modulo m, da $0, 1, 2, \ldots, m - 1$ paarweise nicht kongruent sind.

Bemerkung 2.6 : Es gilt $[a] = [b] \Leftrightarrow m$ teilt $a - b$,

denn: $x \in [a] \Rightarrow x = a + km$, $k \in \mathbb{Z}$, $x \in [b] \Rightarrow x = b + lm$, $l \in \mathbb{Z}$
$\Rightarrow 0 = a - b + (k - l)m \Rightarrow a - b = (l - k)m$.

Definition 2.7 : $\mathbb{Z}_m = \{[0], [1], \ldots, [m - 1]\}$.

In $\mathbb{Z}_m$ definieren wir die Addition und Multiplikation folgendermaßen:
$[a] + [b] = [a + b]$, $[a] \cdot [b] = [a \cdot b]$.

Bemerkung 2.8 : Die Definition 2.7 ist sinnvoll, denn mit $a' \in [a]$, $b' \in [b]$ gilt $a' + b' \in [a + b]$, $a' \cdot b' \in [a \cdot b]$.

Die Definition hängt nicht von den Repräsentanten ab.

Beispiel 2.9 : $m = 5$

$+$	$[0]$	$[1]$	$[2]$	$[3]$	$[4]$
$[0]$	$[0]$	$[1]$	$[2]$	$[3]$	$[4]$
$[1]$	$[1]$	$[2]$	$[3]$	$[4]$	$[0]$
$[2]$	$[2]$	$[3]$	$[4]$	$[0]$	$[1]$
$[3]$	$[3]$	$[4]$	$[0]$	$[1]$	$[2]$
$[4]$	$[4]$	$[0]$	$[1]$	$[2]$	$[3]$

$\bullet$	$[0]$	$[1]$	$[2]$	$[3]$	$[4]$
$[0]$	$[0]$	$[0]$	$[0]$	$[0]$	$[0]$
$[1]$	$[0]$	$[1]$	$[2]$	$[3]$	$[4]$
$[2]$	$[0]$	$[2]$	$[4]$	$[1]$	$[3]$
$[3]$	$[0]$	$[3]$	$[1]$	$[4]$	$[2]$
$[4]$	$[0]$	$[4]$	$[3]$	$[2]$	$[1]$

Beispiel 2.10 : $m = 6$

$+$	$[0]$	$[1]$	$[2]$	$[3]$	$[4]$	$[5]$
$[0]$	$[0]$	$[1]$	$[2]$	$[3]$	$[4]$	$[5]$
$[1]$	$[1]$	$[2]$	$[3]$	$[4]$	$[5]$	$[0]$
$[2]$	$[2]$	$[3]$	$[4]$	$[5]$	$[0]$	$[1]$
$[3]$	$[3]$	$[4]$	$[5]$	$[0]$	$[1]$	$[2]$
$[4]$	$[4]$	$[5]$	$[0]$	$[1]$	$[2]$	$[3]$
$[5]$	$[5]$	$[0]$	$[1]$	$[2]$	$[3]$	$[4]$

$\bullet$	$[0]$	$[1]$	$[2]$	$[3]$	$[4]$	$[5]$
$[0]$	$[0]$	$[0]$	$[0]$	$[0]$	$[0]$	$[0]$
$[1]$	$[0]$	$[1]$	$[2]$	$[3]$	$[4]$	$[5]$
$[2]$	$[0]$	$[2]$	$[4]$	$[0]$	$[2]$	$[4]$
$[3]$	$[0]$	$[3]$	$[0]$	$[3]$	$[0]$	$[3]$
$[4]$	$[0]$	$[4]$	$[2]$	$[0]$	$[4]$	$[2]$
$[5]$	$[0]$	$[5]$	$[4]$	$[3]$	$[2]$	$[1]$

Aus den Tabellen erkennt man:
$\mathbb{Z}_5$ ist nullteilerfrei , $\mathbb{Z}_6$ ist nicht nullteilerfrei, z.B. $[3] \cdot [4] = [0]$.

Da Addition und Multiplikation in $\mathbb{Z}_m$ auf die Addition und Multiplikation in $\mathbb{Z}$ zurückgeführt sind und $\mathbb{Z}$ ein Ring ist, ist plausibel:

Satz 2.11 : Für $m \in \mathbb{N}$ ist $\mathbb{Z}_m$ ein Ring, der **Restklassenring**, mit dem Nullelement $[0]$ und dem Einselement $[1]$.

Bemerkung 2.12 : Gilt $m = p \cdot q$, $p, q \in I\!N \backslash \{1\}$, so folgt
$[p][q] = [pq] = [m] = [0]$, d.h. $[p]$ hat kein multiplikatives Inverses $[y]$ in $\mathbb{Z}_m$, da sonst $[q] = [1][q] = [y][p][q] = [0]$.

Satz 2.13 : Sei $m \in I\!N$ und $[a] \in \mathbb{Z}_m$. Dann gilt:

$[a]$ hat ein inverses Element bzgl. der Multiplikation in $\mathbb{Z}_m$ $\Leftrightarrow$ a und m sind teilerfremd.

Beweis :

" $\Rightarrow$ ": Sei $[a] \in \mathbb{Z}_m$ und es gebe $[a'] \in \mathbb{Z}_m$ mit $[a][a'] = [1]$ $\Rightarrow$ $a \cdot a' = km + 1$, $k \in \mathbb{Z}$. Sei weiter t Teiler von a und Teiler von m, also $a = st, m = rt$, $s, r \in \mathbb{Z}$ $\Rightarrow$
$1 = aa' - km = sta' - krt = t(sa' - kr)$, also ist t auch Teiler von 1, somit a und m teilerfremd.

" $\Leftarrow$ ": Seien a und m teilerfremd. Dann gibt es $a', m' \in \mathbb{Z}$ mit
$1 = aa' + mm'$ (Beweis: Beutelspacher, S.69 ff). a', m' können mit Hilfe des Euklidischen Algorithmus konstruiert werden (Beispiel später).
Also gilt: $aa' = (-m')m + 1 \Rightarrow [a][a'] = [1]$.

Beispiel 2.14 : Euklidischer Algorithmus

Gegeben seien zwei natürliche Zahlen a und b, gesucht ist der größte gemeinsame Teiler von a und b $(ggT(a, b))$.

Beispiel: $a = 32$, $b = 77$

$77 = 2 \cdot 32 + 13$
$32 = 2 \cdot 13 + 6$
$13 = 2 \cdot 6 + 1$
$6 = 6 \cdot 1 + 0$

Dann gilt: $ggT(77, 32) = ggT(32, 13) = ggT(13, 6) = ggT(6, 1) = 1$.

Fängt man mit der vorletzten Gleichung an und benutzt immer die vorherige Gleichung, so erhält man:

$1 = 13 - 2 \cdot 6 = 13 - 2(32 - 2 \cdot 13) = (-2)32 + 5 \cdot 13 = (-2) \cdot 32 + 5(77 - 2 \cdot 32)$
$= 5 \cdot 77 + (-12) \cdot 32$.
Also gilt mit $a' = -12$ und $b' = 5$ $\Rightarrow$ $1 = a' \cdot 32 + b' \cdot 77$.

Definition 2.15 : Sei $m \in I\!N$
$\mathbb{Z}_m^* = \{[a] \in \mathbb{Z}_m \ : \ \text{es existiert } [a'] \in \mathbb{Z}_m \text{ mit } [a][a'] = [1]\}$.

Bemerkung : $\mathbb{Z}_m^*$ enthält die Restklassen $[a]$ von $\mathbb{Z}_m$ mit $ggT(a, m) = 1$.

Beispiel 2.16 :

a) $\mathbb{Z}_6^* = \{[1],[5]\}$, $\mathbb{Z}_5^* = \{[1],[2],[3],[4]\}$.

b) Da sowohl 1 als auch $m-1$ teilerfremd zu m, folgt $\{[1],[m-1]\} \subset \mathbb{Z}_m^*$.

c) Ist p eine Primzahl, so sind die $ggT(a,p) = 1$ für alle $1 \leq a \leq p-1$, also $\mathbb{Z}_p^* = \{[1],[2],\ldots,[p-1]\}$, also $\mathbb{Z}_p^* = \mathbb{Z}_p \backslash \{[0]\}$, falls p Primzahl.

Da für p Primzahl $\mathbb{Z}_p^*$ eine kommutative Gruppe ist, folgt:

Satz 2.17 : Ist p eine Primzahl, so ist $\mathbb{Z}_p$ ein (endlicher) Körper (mit p Elementen).

III Boolesche Algebra

Die Boolesche Algebra ist die Grundlage für den Entwurf von Schaltungen. Es ist die "Algebra der Logik" (George Boole, 1815-1864).

Genau zwei Zustände sind möglich:

"wahr" = "Strom fließt" = 1

"falsch" = "Strom fließt nicht" = 0.

3.1 Grundlegende Operationen und Gesetze

Definition 3.1 : Sei $B = \{0, 1\}$.

(1) Die **Konjunktion** $\wedge$ (Und-Verknüpfung) ist die Abbildung von $B \times B \to B$ mit

$$a \wedge b = \begin{cases} 1 & \text{falls } a = b = 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

(2) Die **Disjunktion** $\vee$ (Oder-Verknüpfung) ist die Abbildung von $B \times B \to B$ mit

$$a \vee b = \begin{cases} 1 & \text{falls } a = 1 \text{ oder } b = 1 \\ 0 & \text{falls } a = b = 0 \end{cases}$$

(3) Die **Negation** $\neg$ ist die Abbildung von $B \to B$ mit

$$\neg a = \begin{cases} 1 & \text{falls } a = 0 \\ 0 & \text{falls } a = 1 \end{cases}$$

Diese Verknüpfungen lassen sich durch Verknüpfungs- oder Wahrheitstabellen darstellen:

Binäre Operationen

$\wedge$	0	1
0	0	0
1	0	1

$\vee$	0	1
0	0	1
1	1	1

a	$\neg a$
0	1
1	0

Statt $\wedge$ ist auch $*$ oder $\cap$ oder $\times$ oder $\bullet$,
statt $\vee$ ist auch $+$ oder $\cup$ oder $\oplus$,
statt $\neg a$ ist auch $\overline{a}$ gebräuchlich.

Mit diesen Operationen können auch kompliziertere Boolesche Ausdrücke zusammengesetzt werden. Dabei ist die Priorität zu beachten:
Ohne Klammern kommt $\neg$ vor $\wedge$ und $\wedge$ kommt vor $\vee$, z.B.

$\neg 0 \vee 1 \wedge 0 = (\neg 0) \vee (1 \wedge 0) = 1 \vee 0 = 1.$

Bei der Auswertung Boolescher Ausdrücke sind die folgenden Rechenregeln wichtig:

Satz 3.2 : Für alle $x, y, z \in B = \{0, 1\}$ gilt

(1) $x \wedge y = y \wedge x$ und $x \vee y = y \vee x$ (Kommutativgesetze)

(2) $x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z$ und $x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z$ (Assoziativgesetze)

(3) $x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$ und $x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$ (Distributivgesetze)

(4) $1 \wedge x = x$, $0 \vee x = x$ (Existenz neutraler Elemente)

(5) $x \wedge \neg x = 0$, $x \vee \neg x = 1$.

Der Beweis kann mit Hilfe von Wahrheitstabellen erfolgen, indem auf beiden Seiten der Gleichung jeweils alle möglichen Wertekombinationen für x, y, z eingesetzt und verglichen werden, z.B. (3): mit $A = x \vee (y \wedge z)$ und $B = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$ gilt:

x	y	z	$y \wedge z$	$x \vee y$	$x \vee z$	A	B
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	1	0	0
0	1	0	0	1	0	0	0
0	1	1	1	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	1	1
1	0	1	0	1	1	1	1
1	1	0	0	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1

Wie man sofort erkennt, geht der zweite Teil einer jeden Aussage in Satz 3.2 aus der ersten hervor, indem man $\wedge$ durch $\vee$ sowie 1 durch 0 ersetzt. Damit erhält man auch in jeder Folgerung aus Satz 3.2 durch diese Vertauschungen "wahre Aussagen".

Folgerung: (**Dualitätsprinzip**)

Jede Aussage, die aus Satz 3.2 folgt, bleibt gültig, wenn $\wedge$ und $\vee$ sowie 1 und 0 überall gleichzeitig vertauscht werden.

Mit Hilfe dieses Prinzips oder mit Hilfe von Wahrheitstabellen folgt

Satz 3.3 : Für $x, y \in B = \{0, 1\}$ gilt

(1) $x \wedge (x \vee y) = x$ und $x \vee (x \wedge y) = x$ (Absorptionsgesetze)

(2) $x \vee x = x$ und $x \wedge x = x$ (Idempotenzgesetze)

(3) $\neg(\neg x) = x$ (Involutionsgesetz)

(4) $\neg(x \wedge y) = \neg x \vee \neg y$ und $\neg(x \vee y) = \neg x \wedge \neg y$ (de Morgans Gesetze).

Beweis : von z.B. (1):

$x \wedge (x \vee y) = (x \vee 0) \wedge (x \vee y) = x \vee (0 \wedge y) = x \vee 0 = x$, da
$0 \wedge y = (0 \wedge y) \vee 0 = (y \wedge 0) \vee 0 = (y \wedge 0) \vee (y \wedge \neg y) = y \wedge (0 \vee \neg y) = y \wedge \neg y = 0.$
Mit Hilfe des Dualitätsprinzips gilt dann auch $x \vee (x \wedge y) = x$.

3.2 Boolesche Funktionen

Definition 3.4 : Sei $B = \{0, 1\}$. Eine Abbildung $f : B^n \to B$ heißt **n-stellige Boolesche Funktion**.

Bemerkung 3.5 :

(1) Eine n-stellige Boolesche Funktion ordnet jedem $\vec{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T$ mit $x_i \in \{0, 1\}$ ein $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \{0, 1\}$ zu.

(2) Eine Boolesche Funktion kann als Schaltung interpretiert werden, die einer Eingabe von n Werten einen Ausgabewert zuordnet.

(3) Boolesche Funktionen können durch Wertetabellen oder durch Boolesche Ausdrücke dargestellt werden.

(4) Da B^n genau 2^n Elemente enthält und eine n-stellige Boolesche Funktion durch Festlegung des Bildes von jedem dieser 2^n Elemente gegeben ist, wobei als Bild nur jeweils 0 oder 1, also 2 Möglichkeiten, möglich sind, gibt es 2^{2^n} n-stellige Boolesche Funktionen.

Beispiel 3.6 : $n = 1$: Es gibt 4 einstellige Boolesche Funktionen f_1, f_2, f_3, f_4 mit folgender Wertetabelle:

x	f_1	f_2	f_3	f_4
0	0	1	0	1
1	0	1	1	0

Offenbar gilt: $f_1(x) = 0$, $f_2(x) = 1$, $f_3(x) = x$, $f_4(x) = \neg x$.

Beispiel 3.7 : $n = 2$

Auch hier lassen sich alle 16 zweistelligen Booleschen Funktionen mit Hilfe einer Wertetabelle angeben.

Bekannt sind bereits: $f(x, y) = x \wedge y$ und $g(x, y) = x \vee y$.

Definition 3.8 : Die zweistellige Boolesche Funktion

(1) $\text{NOR}(x, y) = \neg(x \vee y)$ heißt NOR-Verknüpfung

(1) $\text{NAND}(x, y) = \neg(x \wedge y)$ heißt NAND-Verknüpfung.

Wertetabelle:

x	y	NOR(x, y)	NAND(x, y)
0	0	1	1
0	1	0	1
1	0	0	1
1	1	0	0

Problem: Gegeben sei eine Boolesche Funktion durch eine Wertetabelle. Gesucht ist ein möglichst einfacher Boolescher Ausdruck für diese Funktion.

Definition 3.9 : Disjunktive-, Konjunktive Normalform

(1) Eine **Vollkonjunktion** ist ein Boolescher Ausdruck, in dem alle Variablen genau einmal vorkommen und durch $\wedge$ (mit evt. $\neg$) verbunden sind.
Ein Ausdruck ist in **disjunktiver Normalform**, wenn er aus durch $\vee$ verbundenen Vollkonjunktionen besteht.

(2) **Volldisjunktion** analog mit $\vee$.
Eine **konjunktive Normalform** besteht aus durch $\wedge$ verbundene Volldisjunktionen.

Konstruktion der **disjunktiven Normalform** aus der Wertetabelle von f

(1) Bestimme alle Zeilen, die $f = 1$ liefern

(2) Stelle für diese Zeilen jeweils die Vollkonjunktion auf

(3) Verknüpfe diese Vollkonjunktionen durch $\vee$.

Beispiel 3.10 :

x	y	z	f	Vollkonjunktion
0	0	0	0	
0	0	1	1	$\neg x \wedge \neg y \wedge z$
0	1	0	0	
0	1	1	0	
1	0	0	1	$x \wedge \neg y \wedge \neg z$
1	0	1	1	$x \wedge \neg y \wedge z$
1	1	0	1	$x \wedge y \wedge \neg z$
1	1	1	1	$x \wedge y \wedge z$

Daraus ergibt sich die disjunktive Normalform:
$f(x, y, z) = (\neg x \wedge \neg y \wedge z) \vee (x \wedge \neg y \wedge \neg z) \vee (x \wedge \neg y \wedge z) \vee (x \wedge y \wedge \neg z) \vee (x \wedge y \wedge z)$.

Konstruktion der **konjunktiven Normalform** aus der Wertetabelle von f

(1) Bestimme alle Zeilen, die $f = 0$ liefern
(2) Stelle für diese Zeilen jeweils die Volldisjunktion auf
(3) Verknüpfe diese Volldisjunktionen durch $\wedge$.

Beispiel 3.11 :

x	y	z	f	Volldisjunktion
0	0	0	1	
0	0	1	0	$x \vee y \vee \neg z$
0	1	0	0	$x \vee \neg y \vee z$
0	1	1	1	
1	0	0	1	
1	0	1	1	
1	1	0	1	
1	1	1	0	$\neg x \vee \neg y \vee \neg z$

Daraus ergibt sich die konjunktive Normalform:
$f(x, y, z) = (x \vee y \vee \neg z) \wedge (x \vee \neg y \vee z) \wedge (\neg x \vee \neg y \vee \neg z)$.

Die disjunktive Normalform ist sinnvoll, wenn die Wertetabelle wenige Zeilen mit $f = 1$, die konjunktive, falls sie wenige Zeilen mit $f = 0$ enthält.

Insbesondere zur Anwendung auf Schaltungen ist die Vereinfachung Boolescher Funktionen wichtig.

KV-Schema

Die Idee des **Verfahrens von Karnaugh und Veitch** besteht darin, die disjunktive Normalform systematisch mit dem Ziel umzuformen, daß möglichst viele Ausdrücke der Form $x \vee \neg x$ entstehen, die immer den Wert 1 haben und damit weggelassen werden können.

Zu diesem Zweck wird die disjunktive Normalform der vorliegenden n-stelligen Booleschen Funktion in einem **KV-Schema**, d.h. in einem Rechteck aus 2^n Feldern, wobei jedes Feld einer möglichen Vollkonjunktion entspricht, dargestellt.

$n = 2$

	x	$\neg x$
y		
$\neg y$		

$n = 3$

	$\neg z$	z	
$\neg x$			$\neg y$
x			$\neg y$
x			y
$\neg x$			y

$n = 4$

	$\neg z$	z	z	$\neg z$	
$\neg x$					$\neg y$
x					$\neg y$
x					y
$\neg x$					y
	w	w	$\neg w$	$\neg w$	

Für jede tatsächliche Vollkonjunktion erhält das entsprechende Feld eine 1.
Bei benachbarten Feldern mit Einsen können in den entsprechenden Ausdrücken die Variablen, die negiert und nicht negiert auftreten, gestrichen werden (da $x \vee \neg x = 1$), wobei auch gegenüberliegende Randfelder benachbart sind.

Beispiel 3.12 : Sei die 3-stellige Boolesche Funktion gegeben durch

x	y	z	f	Vollkonjunktion
0	0	0	1	$\neg x \wedge \neg y \wedge \neg z$
0	0	1	0	
0	1	0	0	
0	1	1	1	$\neg x \wedge y \wedge z$
1	0	0	1	$x \wedge \neg y \wedge \neg z$
1	0	1	0	
1	1	0	1	$x \wedge y \wedge \neg z$
1	1	1	0	

Daraus ergibt sich die disjunktive Normalform:
$f(x, y, z) = (\neg x \wedge \neg y \wedge \neg z) \vee (\neg x \wedge y \wedge z) \vee (x \wedge \neg y \wedge \neg z) \vee (x \wedge y \wedge \neg z)$.

KV-Schema

	¬z	z	
¬x	1		¬y
x	1		¬y
x	1		y
¬x		1	y

Die oberen beiden Einsen und die mittleren beiden Einsen können zusammengefaßt werden, dann erhält man:

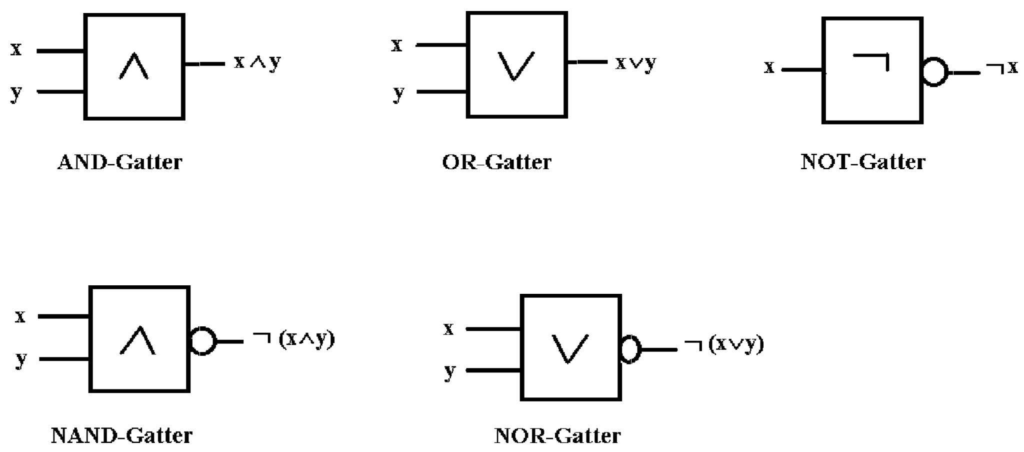
$$f(x, y, z) = ((\neg x \wedge \neg y \wedge \neg z) \vee (x \wedge \neg y \wedge \neg z)) \vee ((x \wedge \neg y \wedge \neg z) \vee (x \wedge y \wedge \neg z)) \vee (\neg x \wedge y \wedge z)$$
$$= (\neg y \wedge \neg z) \vee (x \wedge \neg z) \vee (\neg x \wedge y \wedge z).$$

Dieses Ergebnis kann sofort aus dem KV-Schema abgelesen werden.

3.3 Logische Schaltungen

Eine logische Schaltungen ist die physikalische Realisierung einer Booleschen Funktion. Dabei werden die Operationen durch elektronische Bauteile (Gatter) verwirklicht.

Bezeichnung 3.13 :



Es gilt:

$x \wedge y = (x \wedge y) \vee 0 = \neg(\neg(x \wedge y) \wedge 1) = \mathrm{NAND}(\mathrm{NAND}(x, y), 1)$

$x \vee y = (x \wedge 1) \vee (y \wedge 1) = \neg(\neg(x \wedge 1) \wedge \neg(y \wedge 1) = \mathrm{NAND}(\mathrm{NAND}(x, 1), \mathrm{NAND}(y, 1))$

$\neg x = \neg(x \wedge 1) = \mathrm{NAND}(x, 1)$.

Somit können Konjunktion, Disjunktion und Negation allein durch NAND ausgedrückt werden.

Weiter gilt:

$x \wedge y = (x \vee 0) \wedge (y \vee 0) = \neg(\neg(x \vee 0) \vee \neg(y \vee 0) = \mathrm{NOR}(\mathrm{NOR}(x, 0), \mathrm{NOR}(y, 0))$

$x \vee y = (x \vee y) \wedge 1 = \neg(\neg(x \vee y) \vee 0) = \mathrm{NOR}(\mathrm{NOR}(x, y), 0)$

$\neg x = \neg(x \vee 0) = \mathrm{NOR}(x, 0)$.

Somit können Konjunktion, Disjunktion und Negation auch allein durch NOR ausgedrückt werden.

Zur Anwendung der Booleschen Algebra auf Schaltungsprobleme soll nun untersucht werden wie
1) zu einer Schaltung eine äquivalente Boolesche Funktion konstruiert werden kann und
2) aus einer Wertetabelle einer Booleschen Funktion die entsprechende Schaltung zu realisieren ist.

Zu 1) Die Gatter der Schaltung werden als entsprechende Boolesche Ausdrücke dargestellt.

Zu 2) Aus der Wertetabelle kann eine Normalform hergeleitet werden, in der - evt. nach Vereinfachung - die binären Operationen durch die entsprechenden Gatter darzustellen sind.

Weiter können auch Schalterkombinationen mit Hilfe Boolescher Funktionen dargestellt werden.

Beispiel 3.14 : Gesucht ist eine Schaltung mit drei Eingängen a, b, c, an deren Ausgang genau dann der Zustand 1 eintritt, wenn Eingang $a = 1$ und
($b = 1$ oder $c = 1$) gelten.

1) Wertetabelle der Booleschen Funktion $f(a, b, c)$

x	y	z	f	Vollkonjunktion
0	0	0	0	
0	0	1	0	
0	1	0	0	
0	1	1	0	
1	0	0	0	
1	0	1	1	$a \wedge \neg b \wedge c$
1	1	0	1	$a \wedge b \wedge \neg c$
1	1	1	1	$a \wedge b \wedge c$

2) Disjunktive Normalform

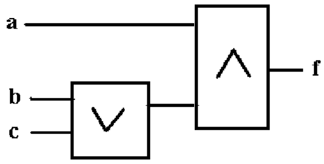
$f(a, b, c) = (a \wedge \neg b \wedge c) \vee (a \wedge b \wedge \neg c) \vee (a \wedge b \wedge c)$

3) KV-Schema

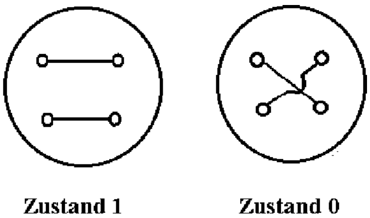
	$\neg c$	c	
$\neg a$			$\neg b$
a		1	$\neg b$
a	1	1	b
$\neg a$			b

Also gilt: $f(a,b,c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c) = a \wedge (b \vee c)$

4) Schaltung

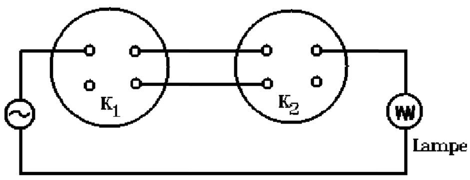


Beispiel 3.15 : Gegeben seien K_i , $i = 1, 2, 3$ mit den Schaltmöglichkeiten



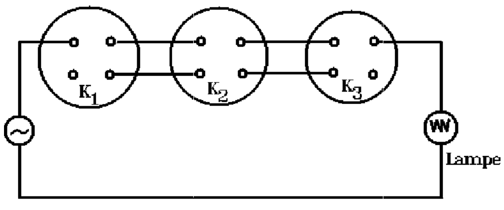
Man bestimme für die Schaltungen

a)



Wechselschaltung

b)



die Boolesche Funktion.

a) Wertetabelle der Booleschen Funktion $f(a, b)$

a	b	f	Vollkonjunktion
0	0	1	$\neg a \wedge \neg b$
0	1	0	
1	0	0	
1	1	1	$a \wedge b$

Disjunktive Normalform

$f(a, b) = (a \wedge b) \vee (\neg a \wedge \neg b)$

KV-Schema

	a	$\neg a$
b	1	
$\neg b$		1

Keine Vereinfachung möglich.

b) Wertetabelle der Booleschen Funktion $f(a, b, c)$

x	y	z	f	Vollkonjunktion
0	0	0	0	
0	0	1	1	$\neg a \wedge \neg b \wedge c$
0	1	0	1	$\neg a \wedge b \wedge \neg c$
0	1	1	0	
1	0	0	1	$a \wedge \neg b \wedge \neg c$
1	0	1	0	
1	1	0	0	
1	1	1	1	$a \wedge b \wedge c$

Disjunktive Normalform

$f(a, b, c) = (\neg a \wedge \neg b \wedge c) \vee (\neg a \wedge b \wedge \neg c) \vee (a \wedge \neg b \wedge \neg c) \vee (a \wedge b \wedge c)$

KV-Schema

	$\neg c$	c	
$\neg a$		1	$\neg b$
a	1		$\neg b$
a		1	b
$\neg a$	1		b

Keine Vereinfachung möglich.

IV Graphentheorie

4.1 Ungerichtete Graphen

4.1.1 Grundbegriffe

Definition 4.1 : Ein (ungerichteter) Graph $G(E, K)$ besteht aus **Ecken** $e \in E$ (E Eckenmenge) und **Kanten** $k \in K$ (K Kantenmenge). Jede Kante verbindet genau 2 Ecken (nicht notwendig verschieden). 2 Ecken können durch keine, eine oder mehr als eine Kante verbunden sein.

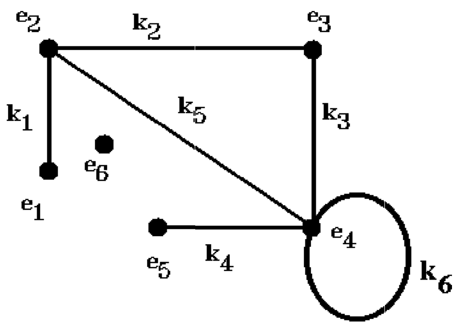
Bezeichnung 4.2 : Eckenmenge $E = \{e_1, e_2, \ldots, e_l\}$,
Kantenmenge $K = \{k_1, k_2, \ldots, k_r\}$.
Verbindet die Kante k die Ecken e_i und e_{i+1}, so schreiben wir $k = (e_i, e_{i+1})$.
Eine Kante k heißt **Schlinge**, falls $k = (e, e)$.
Für $k = (e_1, e_2)$ heißen die Ecken e_1, e_2 benachbart oder **adjazent**.
$k, l \in K$ heißen **inzident**, falls eine Ecke $e \in E$ existiert mit $e \in k$ und $e \in l$.

Beispiel 4.3 :

a) Elektrische Netzwerke: Ecken sind die elektrischen Objekte, Kanten die Verbindungen.

b) Straßennetze: Ecken sind die Kreuzungen, Kanten die Straßen.

Beispiel 4.4 :



$k_1 = (e_1, e_2)$, $k_2 = (e_2, e_3)$, $k_3 = (e_3, e_4)$, $k_4 = (e_4, e_5)$, $k_5 = (e_4, e_2)$, $k_6 = (e_4, e_4)$,
e_6 ist isolierte Ecke, k_6 ist eine Schlinge, e_1, e_2 sind adjazent, k_1, k_2 sind inzident.

Definition 4.5 : Sei $G(E,K)$ ein Graph, $e_i \in E$, $k_i \in K$ für $i = 1, 2, \ldots, l+1$ (jeweils nicht notwendig verschieden).

(1) $\{k_1, k_2, \ldots, k_l\}$ heißt **Kantenzug**, der e_1 mit e_{l+1} verbindet, falls $k_i = (e_i, e_{i+1})$, $1 \leq i \leq l$.

(2) Ein **Weg** ist ein Kantenzug mit lauter verschiedenen Ecken; die Länge des Weges ist die Anzahl seiner Kanten.

(3) Ein Kantenzug heißt **geschlossen**, wenn $e_1 = e_{l+1}$.
Ein geschlossener Weg heißt **Kreis**.

(4) $e \in E$ heißt **erreichbar** von $f \in E$, falls es einen Weg zwischen e und f gibt.

(5) $G(E,K)$ heißt **zusammenhängend**, wenn je zwei Ecken durch einen Kantenzug verbunden werden können.

(6) Der **Eckengrad** $d(e)$ einer Ecke $e \in E$ ist die Anzahl der dort beginnenden Kanten. Für $d(e) = 0$ ist e **isoliert**.

(7) $G'(E', K')$ heißt **Untergraph** von $G(E,K)$, falls $E' \subset E$, $K' \subset K$.
Enthält K' alle Kanten $k \in K$ zwischen den Ecken $e \in E'$, die auch in G vorkommen, so heißt G' **induzierter Untergraph** von G.

(8) Ein maximal zusammenhängender Untergraph von $G(E,K)$ heißt **Komponente** von G.

(9) $k \in K$ heißt **Brücke**, wenn die Entfernung von k die Anzahl der Komponenten erhöht.

(10) Die Graphen $G_1(E_1, K_1)$ und $G_2(E_2, K_2)$ heißen **gleich**, wenn $E_1 = E_2$ und $K_1 = K_2$, wobei die Relationen zwischen Ecken und Kanten übereinstimmen müssen.

(11) $G_1(E_1, K_1) \sim G_2(E_2, K_2)$ heißen **isomorph**, wenn es eine bijektive Abbildung $\varphi : E_1 \to E_2$ gibt, so daß für alle $u, v \in E_1$ die Anzahl der Kanten zwischen u und v in G_1 gleich der zwischen $\varphi(u)$ und $\varphi(v)$ in G_2 ist.

(12) $G(E,K)$ heißt **schlicht**, wenn G keine Schlingen und keine Mehrfachkanten enthält

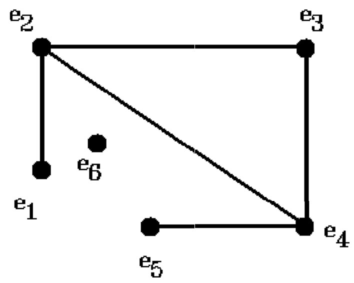
Bemerkung 4.6 :

(1) $G(E,K)$ zusammenhängend $\Leftrightarrow$ $G(E,K)$ hat genau eine Komponente.

(2) $k \in K$ Brücke $\Leftrightarrow$ k ist in keinem Kreis von $G(E,K)$.

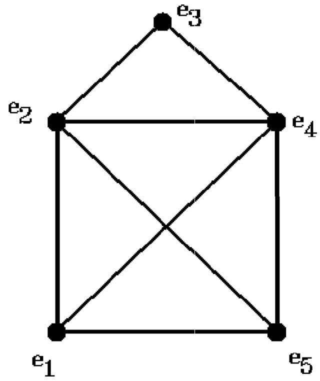
(3) $G_1 \sim G_2$ $\Leftrightarrow$ G_2 geht aus G_1 durch Umnummerierung hervor.

Beispiel 4.7 :



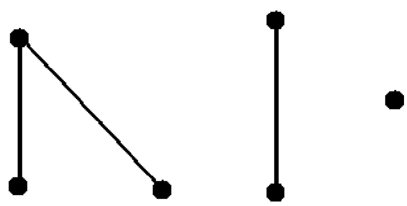
nicht zusammenhängend, 2 Komponenten
$d(e_1) = d(e_5) = 1$, $d(e_2) = d(e_4) = 3$,
$d(e_3) = 2$, $d(e_6) = 0$ (isolierte Ecke)
$(e_2, e_3), (e_3, e_4), (e_4, e_1)$ Kreis
(e_4, e_5) Brücke

Beispiel 4.8 :



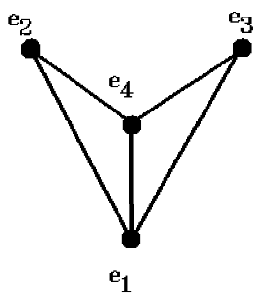
zusammenhängend
$d(e_1) = d(e_5) = 3$, $d(e_2) = d(e_4) = 4$,
$d(e_3) = 2$
$(e_1, e_2), (e_2, e_3), (e_3, e_4), (e_4, e_5), (e_5, e_1)$ Kreis
keine Brücke

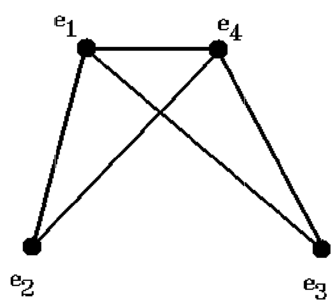
Beispiel 4.9 :



nicht zusammenhängend
3 Komponenten

Beispiel 4.10 : Die folgenden beiden Graphen sind isomorph

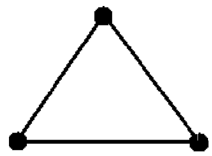




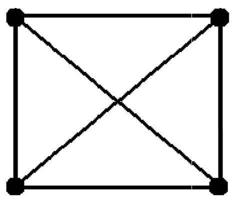
Definition 4.11 : Ein Graph heißt **vollständig**, wenn jede Ecke mit jeder anderen Ecke durch genau eine Kante verbunden ist. Ein vollständiger Graph mit n Ecken wird mit K_n bezeichnet. K_n ist zusammenhängend und für jede Ecke ist der Eckengrad $d(e) = n - 1$.

K_1

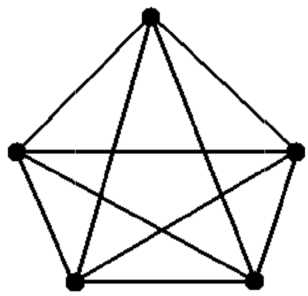
K_2



K_3



K_4



K_5

Bezeichnung 4.12 : Sei $G(E, K)$ ein Graph.

(1) Ist $k \in K$ und $K_1 \subset K$, so sei $G \backslash k = G(E, K \backslash \{k\})$, $G \backslash K_1 = G(E, K \backslash K_1)$.

(2) Ist $e \in E$ und $E_1 \subset E$, so sei $G \backslash e = G(E \backslash \{e\}, K)$, $G \backslash E_1 = G(E \backslash E_1, K)$.

(3) Für $e, f \in E$ sei G_{ef} der Graph, der aus G durch Fusion von e mit f entsteht, d.h. durch Identifizierung von e mit f zu einer Ecke $\tilde{e}$, die zu allen Kanten inzident ist, wie vorher e und f. Analog für $E_1 \subset E$: $\quad G_{E_1}$.

(4) Für $k = (e, f) \in K$ sei $G_{/k}$ der Graph, der aus G durch Kontraktion von k entsteht, d.h. durch Entfernung von k mit anschließender Fusion von e mit f.

Bemerkung : Offenbar gilt: $G(E, K)$ zusammenhängend $\Leftrightarrow$ G geht durch eine Folge von Kontraktionen in einen Graphen mit genau einer Ecke über.

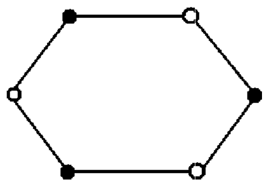
Definition 4.13 : Bipartite Graphen

$G(E, K)$ heißt **bipartit**, wenn $E = E_1 \cup E_2$, $E_1 \cap E_2 = \emptyset$, so daß jede Kante $k \in K$ genau eine Endecke in E_1 und E_2 hat.

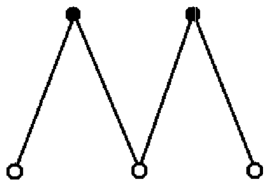
$G(E, K)$ heißt **vollständig bipartit**, wenn G bipartit ist und zusätzlich jede Ecke von E_1 mit jeder Ecke von E_2 durch genau eine Kante verbunden ist.

Für $|E_1| = m$, $|E_2| = n$ bezeichnen wir den **vollständigen bipartiten Graphen** mit $K_{m,n}$

Beispiel 4.14 :

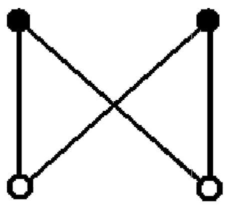


bipartiter Graph, ohne Brücke

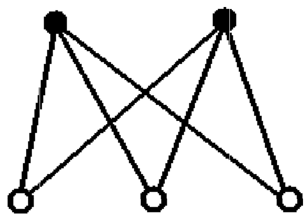


bipartiter Graph, jede Kante ist Brücke

Beispiel 4.15 :



vollständig bipartiter Graph $K_{2,2}$



vollständig bipartiter Graph $K_{2,3}$

Satz 4.16 : Sei $G(E,K)$ ein Graph. Dann gilt

$$\sum_{e \in E} d(e) = 2|K| \; .$$

Beweis : Es gilt $\sum\limits_{e \in E} d(e) =$ Anzahl der Endecken aller Kanten $= 2|K|$, da jede Kante 2 Endecken hat, so daß jede Kante zwei mal gezählt wird.

Bemerkung 4.17 :

(1) Für $G(E,K) = K_n$ gilt: $|E| = n$, $|K| = \binom{n}{2}$.

(2) Für $G(E,K) = K_{m,n}$ gilt: $|E| = m + n$, $|K| = mn$.

Beweis : Per Induktion.

Satz 4.18 : Jeder Graph hat eine gerade Anzahl von Ecken ungeraden Grades.

Beweis : Sei $E = E_g \cup E_u$ mit $E_g = \{e \in E \;:\; d(e) \text{ gerade}\}$,
$E_u = \{e \in E \;:\; d(e) \text{ ungerade}\}$. Dann folgt aus Satz 4.16:
$2|K| = \sum\limits_{e \in E} d(e) = \sum\limits_{e \in E_g} d(e) + \sum\limits_{e \in E_u} d(e) \Rightarrow \sum\limits_{e \in E_u} d(e)$ gerade $\Rightarrow$ Behauptung, da $d(e)$ ungerade für $e \in E_u$.

Definition 4.19 : Ein **Gerüst** eines Graphen $G(E,K)$ ist ein zusammenhängender kreisfreier Untergraph von G, der alle Ecken aus E enthält.

Bemerkung 4.20 :

(1) Ein Gerüst ist also ein Untergraph von G, der die kleinste Teilmenge von K enthält, so daß noch Zusammenhang besteht und wo alle Ecken aus E vorkommen, also ist ein Gerüst ein *minimal zusammenhängender Untergraph* von G mit allen Ecken aus E.

(2) Ist G nicht zusammenhängend, so besitzt G kein Gerüst.

Satz 4.21 : Ein Graph $G(E,K)$ mit $|E| \geq 2$ ist genau dann **bipartit**, wenn alle Kreise in G gerade Länge haben.

Beweis : Sei $G(E,K)$ o.E. zusammenhängend (sonst die einzelnen Komponenten untersuchen).

"$\Rightarrow$": Sei G bipartit, $E = S \cup T$, $S \cap T = \emptyset$. Dann verläuft jeder Kreis abwechselnd zwischen Ecken aus S und T, muß also gerade Länge haben.

"$\Leftarrow$": Seien alle Kreise in G von gerader Länge, $u \in E$ eine beliebige Ecke. Für $v \in E$ sei $v \in S$, falls $d(u,v)$ gerade , und $v \in T$, falls $d(u,v)$ ungerade ($d(u,v)$ Weglänge von u nach v).
$\Rightarrow u \in S$ (da $d(u,u) = 0$ gerade) und $S \cap T = \emptyset$.
Annahme: Zu $v,w \in T$ gibt es $k \in K$ mit $k = (v,w)$, also v,w benachbart.
Nun gilt $d(u,v) \leq d(u,w) + d(v,w)$, also $d(u,v) - d(u,w) \leq d(v,w) \leq 1$
und $d(u,w) \leq d(u,v) + d(v,w)$, also $d(u,w) - d(u,v) \leq d(v,w) \leq 1$.
Somit gilt $|d(u,v) - d(u,w)| \leq 1$.
Da $d(u,v)$, $d(u,w)$ ungerade $\Rightarrow d(u,v) - d(u,w)$ gerade, also $d(u,v) = d(u,w)$.
Sei W ein Weg von u nach v der Länge $d(u,v)$, W' ein Weg von u nach w der Länge $d(u,w)$ und z die letzte gemeinsame Ecke auf W und W'. Dann gilt
$d(u,v) = d(u,z) + d(z,v)$ (auf W)
$= d(u,w) = d(u,z) + d(z,w)$ (auf W')
$\Rightarrow d(z,v) = d(z,w)$ und der Kreis $W(z,v)(v,w), W'(w,z)$ hat die Länge
$d(z,v) + d(v,w) + d(w,z) = 2d(z,v) + 1$, also ungerade $\Rightarrow$ Widerspruch.

4.1.2 Darstellung von Graphen durch Matrizen

Außer zeichnerisch werden Graphen auch mit Hilfe von Matrizen dargestellt.

Sei $G(E,K)$ ein Graph mit $E = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$, $K = \{k_1, k_2, \ldots, k_m\}$.

Definition 4.22 :

(1) Die Matrix $A = (a_{i,j})_{1\le i\le n, 1\le j\le n}$ mit $a_{i,j}$ = Anzahl der Kanten zwischen e_i und e_j heißt **Adjazenzmatrix** von G.

(2) Die Matrix $B = (b_{i,j})_{1\le i\le n, 1\le j\le m}$ mit
$$b_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{falls Ecke } i \text{ und Kante } j \text{ inzident} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$
heißt **Inzidenzmatrix** von G.

(3) Die Matrix $C = (c_{i,j})_{1\le i\le n, 1\le j\le n}$ mit
$$b_{i,j} = \begin{cases} d(e) & \text{falls } i = j \\ 0 & \text{falls } i \neq j \end{cases}$$
heißt **Gradmatrix** von G.

Bemerkung 4.23 :

(1) A ist symmetrisch.

(2) Hat G keine Schlingen, so gilt: $a_{i,i} = 0$.

(3) Hat G keine Mehrfachkanten, so gilt: $a_{i,j} = 0$ oder $a_{i,j} = 1$.

(4) Gilt für die Graphen G und H: $A(G) = A(H)$, so gilt auch $G = H$.

(5) Durch Umnummerierung der Ecken von G ändert sich i.a. $A(G)$.

Satz 4.24 : Sei G ein Graph ohne Schlingen, dann folgt:
$$BB^T = A + C\ .$$

Beweis : Sei $M = BB^T = (m_{i,j})_{1\le i\le n, 1\le j\le n}$.
Da $M^T = (BB^T)^T = (B^T)^T B^T = BB^T = M$, ist M symmetrisch.
Mit $B^T = (g_{i,j})_{1\le i\le m, 1\le j\le n}$ und $g_{i,j} = b_{j,i}$, $1 \le i \le m, 1 \le j \le n$ folgt
$$m_{i,j} = \sum_{r=1}^{m} b_{i,r} b_{j,r}.$$
Für $i \neq j$ ist $b_{i,r}b_{j,r} = 1 \Leftrightarrow e_i \in k_r$, $e_j \in k_r$, d.h. wenn e_i, e_j adjazent, wobei in der Summe soviele Einsen auftauchen wie Kanten zwischen e_i und e_j sind, also $m_{i,j} = a_{i,j}$.
Für $i = j$ ist $b_{i,r}b_{i,r} = b_{i,r}^2 = 1 \Leftrightarrow e_i \in k_r$, d.h. wenn e_i und k_r inzident, wobei in der Summe wieder soviele Einsen auftauchen wie Kanten mit e_i inzident sind, also $m_{i,j} = d(e)$.

Satz 4.25 : Sei G ein Graph ohne Schlingen, A seine Adjazenzmatrix, A^k für $k \in \mathbb{N}$ ihre k-te Potenz, $A^k = (a_{i,j}^{(k)})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n}$.
Dann gibt $a_{i,j}^{(k)}$ für $k \in \mathbb{N}$ die Anzahl der Kantenzüge der Länge k von e_i nach e_j an.

Beweis : Vollständige Indunktion über k

$k = 1$: Definition von A

$k = 2$: $a_{i,j}^{(2)} = \sum_{r=1}^{n} a_{i,r} a_{r,j}$, $(1 \leq i, j \leq n)$,

$a_{i,r} a_{r,j} \neq 0 \Leftrightarrow$ es gibt eine Kante von e_i nach e_r und eine von e_r nach e_j
$\Leftrightarrow$ es gibt einen Kantenzug der Länge 2 von e_i nach e_j über e_r.

Wenn in diesem Fall p Kanten von e_i nach e_r und q Kanten von e_r nach e_j führen, so gibt es pq Kantenzüge der Länge 2 von e_i nach e_j über e_r. Somit ist $a_{i,j}^{(2)}$ die Gesamtzahl aller Kantenzüge der Länge 2 von e_i nach e_j.
(Induktionsschluß analog)

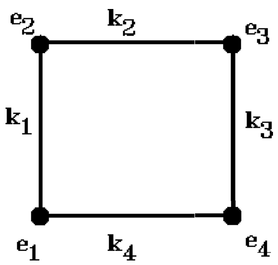
Satz 4.26 : (Kirchhoff) Sei $G(E, K)$ ein Graph ohne Schlingen, A seine Adjazenzmatrix und C seine Gradmatrix. Weiter sei $L = C - A$ (Admittanzmatrix), $e_i \in E$ eine beliebige Ecke und L_i die Matrix, die aus L durch Streichen von Zeile und Spalte i entsteht.

Dann ist die Anzahl der Gerüste dieses Graphen gegeben durch

$$t(G) = \det L_i.$$

Beweis : siehe Literatur, z.B. Sachs: Einführung in die Theorie der endlichen Graphen, Leipzig 1970.

Beispiel 4.27 :



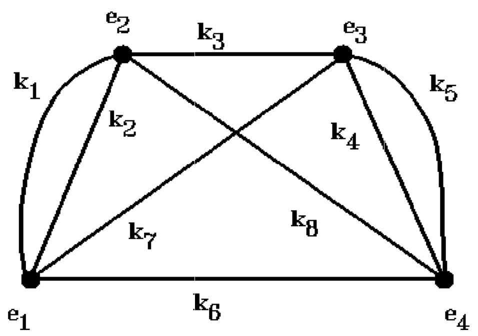
G ist ein Kreis
Gerüst durch Entfernung genau einer Kante
$\Rightarrow \quad t(G) = 4$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} , \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} , \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A+C=\begin{pmatrix}2&1&0&1\\1&2&1&0\\0&1&2&1\\1&0&1&2\end{pmatrix}=BB^T \quad , \quad L=C-A=\begin{pmatrix}2&-1&0&-1\\-1&2&-1&0\\0&-1&2&-1\\-1&0&-1&2\end{pmatrix}$$

$\det L_i = 4$ für alle $i=1,2,3,4$.

Beispiel 4.28 :



$$A=\begin{pmatrix}0&2&1&1\\2&0&1&1\\1&1&0&2\\1&1&2&0\end{pmatrix} \quad , \quad B=\begin{pmatrix}1&1&0&0&0&1&1&0\\1&1&1&0&0&0&0&1\\0&0&1&1&1&0&1&0\\0&0&0&1&1&1&0&1\end{pmatrix}$$

$$C=\begin{pmatrix}4&0&0&0\\0&4&0&0\\0&0&4&0\\0&0&0&4\end{pmatrix} \quad , \quad A+C=\begin{pmatrix}4&2&1&1\\2&4&1&1\\1&1&4&2\\1&1&2&4\end{pmatrix}=BB^T$$

$$L=C-A=\begin{pmatrix}4&-2&-1&-1\\-2&4&-1&-1\\-1&-1&4&-2\\-1&-1&-2&4\end{pmatrix}$$

$$A^2=\begin{pmatrix}0&2&1&1\\2&0&1&1\\1&1&0&2\\1&1&2&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&2&1&1\\2&0&1&1\\1&1&0&2\\1&1&2&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6&2&4&4\\2&6&4&4\\4&4&6&2\\4&4&2&6\end{pmatrix}$$

Also existieren z.B. 6 Kantenzüge der Läng 2 von e_1 nach e_1 oder 2 Kantenzüge der Läng 2 von e_1 nach e_2 oder 4 Kantenzüge der Läng 2 von e_1 nach e_3.

$$\det L_1=\begin{vmatrix}4&-1&-1\\-1&4&-2\\-1&-2&4\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}4&-1&-1\\-1&4&-2\\0&-6&6\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}4&-2&-1\\-1&2&-2\\0&0&6\end{vmatrix}=6(8-2)=6^2=36.$$

Also existieren 36 Gerüste.

4.1.3 Eulersche Graphen

Definition 4.29 : Sei $G(E,K)$ ein Graph mit $|K| = r$.

(1) Eine Kantenfolge $\{k_1, k_2, \ldots, k_r\}$ mit k_i inzident zu k_{i+1} , $1 \leq i \leq r-1$, die *jede Kante aus K genau ein Mal* enthält, heißt **offener Euler-Zug**, wenn Anfangs- und Endecke verschieden, und (geschlossener) **Euler-Zug**, wenn Anfangsecke gleich Endecke ist.

(2) $G(E,K)$ heißt **eulersch**, wenn G einen geschlossenen Euler-Zug enthält.

Satz 4.30 : Sei $G(E,K)$ ein zusammenhängender Graph, $K \neq \emptyset$.
G ist genau dann eulersch, wenn jede Ecke geraden Grad hat (wobei Schlingen doppelt zu zählen sind).

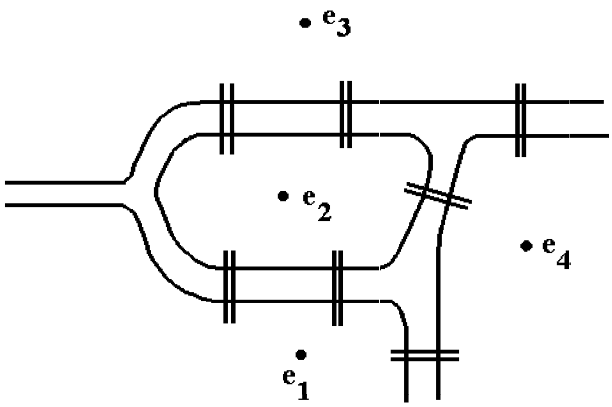
Beweis :

"$\Rightarrow$" Sei G eulersch und Z ein Euler-Zug, $e \in Z$ beliebige Ecke, wobei Z diese Ecke e l-mal durchquere. Bei jeder Durchquerung von Z durch e werden 2 Kanten benötigt, also $d(e) \geq 2l$. Da weiter jede Kante aus Z genau ein Mal auftritt, gilt $d(e) \leq 2l$, also insgesamt $d(e) = 2l$, also gerade.

"$\Leftarrow$" Sei $d(e)$ gerade für alle $e \in E$.
Vollständige Induktion über $|K|$:

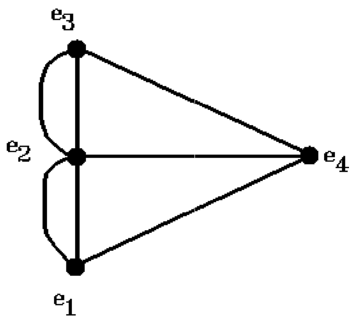
Induktionsanfang:
$|K| = 1 \Rightarrow G$ nicht eulersch, da Eckengrade gleich 1.
$|K| = 2 \Rightarrow G$ eulersch, falls Eckengrade gerade, denn dann ist G ein Kreis.
Induktionsschritt:
Da G zusammenhängend ist und jede Ecke geraden Grad hat, hat jede Ecke mindestens den Grad 2, also gibt es einen Kreis in G (da man - wegen Eckengrad ≥ 2 - jede Ecke, an der man ankommt auch wieder verlassen kann). Sei C ein Kreis in G mit maximaler Länge, dann behaupten wir, daß dieser Kreis ein (geschlossener) Euler-Zug ist.
Annahme: C ist kein Euler-Zug. Dann entfernen wir die Kanten von C von G. Übrig bleibt ein Graph G' (nicht notwendig zusammenhängend), in dem jede Ecke geraden Grad hat (evt. 0). Nach Induktionsannahme gäbe es dann in einer Zusammenhangskomponente von G' einen Euler-Zug. Vereinigen wir diesen Euler-Zug mit C, so erhalten wir einen Kreis, der länger als C ist. Das ist ein Widerspruch zur Maximalität von C.

Beispiel 4.31 : Königsberger Brückenproblem



Gibt es einen Spaziergang, bei dem jede Brücke genau ein Mal überquert wird, und der am Ausgangspunkt endet?

Dieses Problem kann mit Hilfe von Graphentheorie gelöst werden. Man erhält den folgenden zugehörigen Graphen. Die Frage lautet: ist dieser Graph eulersch?



G ist zusammenhängend, aber für die Eckengrade gilt:
$d(e_1) = d(e_3) = d(e_4) = 3$, $d(e_2) = 5$, also sind nicht alle Eckengrade gerade, also ist G nicht eulersch.
Das Königsberger Brückenproblem ist also nicht lösbar. (Euler hat diese Frage schon 1736 beantwortet.)

Konstruktion eines Euler-Zuges, Algorithmus von Hierholzer

1. Beginne bei einer beliebigen Ecke.
2. Gehe über "freie" Kante zu einer benachbarten Ecke.
3. Führe Schritt 2. aus, solange noch "freie" Kanten vorhanden.
   Da $d(e)$ gerade, kommt man immer wieder weiter.
4. Ist man wieder bei der Ausgangsecke angekommen, so erhält man einen geschlossenen Euler-Teil-Zug (Kreis).
5. Sind noch "freie" Kanten übrig, so beginne bei einer Ecke eines schon erzeugten Euler-Teil-Zuges und fahre fort bei 2.
   Da $d(e)$ gerade, kann man bei dieser Ausgangsecke wieder zurückkommen.

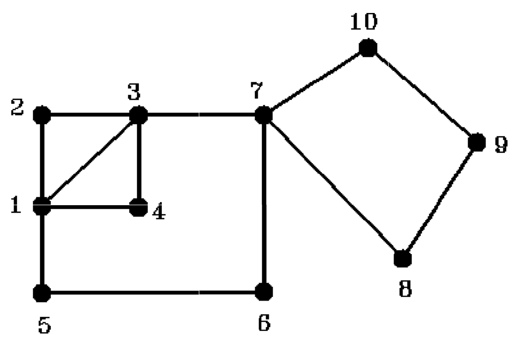
6. Fahre bei 5. fort, falls noch "freie" Kanten übrig.
7. Auf diese Weise erhält man endlich viele Euler-Teil-Züge (Kreise), die alle Kanten von G genau ein Mal enthalten.
8. Den gesamten Euler-Zug erhält man, indem man diese Kreise folgendermaßen zusammensetzt:

Gesamter Euler-Zug

1. Beginne beim ersten Kreis.
2. Falls man auf einen neuen Kreis stößt, wechsle auf diesen neuen Kreis. Falls man auf einen Kreis stößt, auf dem man schon mal war, darf nicht gewechselt werden.
3. Ist man bei einem Kreis wieder an der Anfangsecke angelangt, so wechsle auf den nächsten Kreis.

Auf diese Weise erhält man einen Euler-Zug.

Beispiel 4.32 :



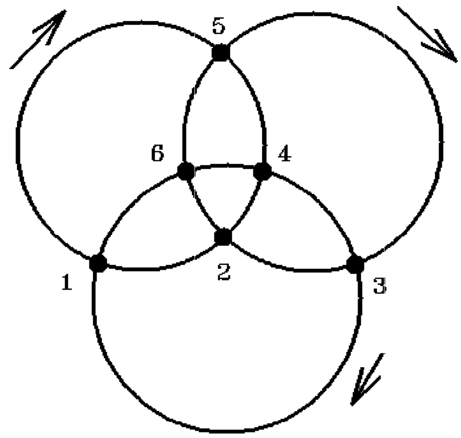
Bilde folgende Kreise:

$1 \to 2 \to 3 \to 4 \to 1$, $3 \to 7 \to 6 \to 5 \to 1 \to 3$, $7 \to 10 \to 9 \to 8 \to 7$

Setzte diese Kreise zu einem Euler-Zug zusammen:

$1 \to 2 \to 3 \to 7 \to 10 \to 9 \to 8 \to 7 \to 6 \to 5 \to 1 \to 3 \to 4 \to 1$

Beispiel 4.33 :



Bilde folgende Kreise:

$1 \to 5 \to 4 \to 2 \to 1$, $5 \to 3 \to 2 \to 6 \to 5$, $3 \to 1 \to 6 \to 4 \to 3$

Setzte diese Kreise zu einem Euler-Zug zusammen:

$1 \to 5 \to 3 \to 1 \to 6 \to 4 \to 3 \to 2 \to 6 \to 5 \to 4 \to 2 \to 1$

Bemerkung 4.34 : Der vollständige Graph K_{2n+1} mit ungerader Eckenzahl ist eulersch, da $d(e) = 2n$ für alle Ecken gilt.

Satz 4.35 : Sei $G(E, K)$ zusammenhängend.

G besitzt genau dann einen **offenen Euler-Zug**, wenn G genau zwei Ecken ungeraden Grades hat.

In diesem Fall beginnt der offene Euler-Zug an einer der beiden Ecken ungeraden Grades und endet an der anderen.

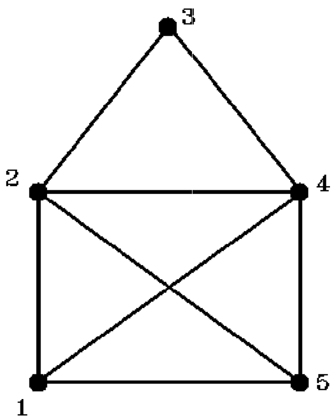
Beweis :

"$\Rightarrow$": G habe einen offenen Euler-Zug mit den Ecken $e_1, e_2, \dots, e_n$. Durch Hinzufügen der Kante k^* zwischen e_n und e_1 entsteht aus G ein Eulerscher Graph G^*, so daß in G^* gilt: $d(e_i)$ gerade für $1 \leq i \leq n$. Somit gilt in G: $d(e_1), d(e_n)$ ungerade, $d(e_i)$ gerade für $2 \leq i \leq n-1$.

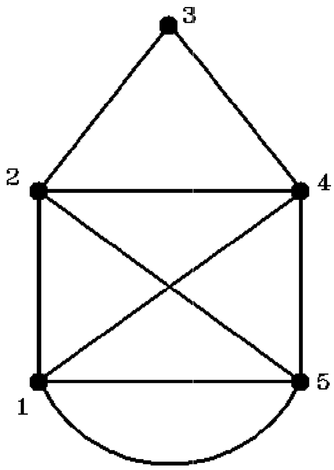
"$\Leftarrow$": Sei G zusammenhängend mit den Ecken $e_1, e_2, \dots, e_n$, wobei $d(e_1), d(e_n)$ ungerade, $d(e_i)$ gerade für $2 \leq i \leq n-1$. Durch Hinzufügen von $k^* = (e_n, e_1)$ entsteht G^*, dessen Ecken alle gerade sind, also G^* Eulersch. Also enthält G^* einen (geschlossenen) Euler-Zug, z.B. $k_1, k_2, \dots, k_s, k^*, k_{s+2}, \dots, k_m$, wobei k_1, k_m inzident sind. Dann ist in G $\quad k_{s+2}, \dots, k_m, k_1, \dots k_s$ ein offener Euler-Zug.

Bemerkung 4.36 : Königsberger Brückenproblem
Da alle Ecken ungeraden Grad haben, existiert kein offener Euler-Zug.
Also ist auch kein Spaziergang möglich, der über alle Brücken führt, wobei Anfangs- und Endpunkt verschieden sind.

Beispiel 4.37 : Das Nikolaushaus



Das Nikolaushaus ist nicht Eulersch, aber es existiert ein offener Euler-Zug, z.B. $1 \to 2 \to 3 \to 4 \to 5 \to 2$
$\to 4 \to 1 \to 5$



Dieser Graph ist Eulersch, z.B. Euler-Zug:
$1 \to 2 \to 3 \to 4 \to 5 \to 2 \to 4$
$\to 1 \to 5 \to 1$

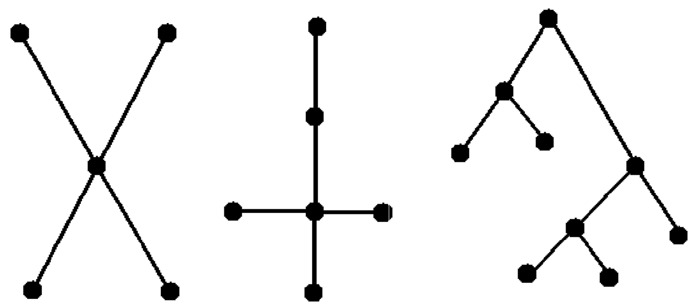
4.1.4 Bäume

Definition 4.38 : Sei $G(E, K)$ ein Graph.

(1) G heißt **Baum**, wenn G zusammenhängend ist und keinen Kreis enthält.

(2) G heißt **Wald**, wenn die Komponenten von G Bäume sind.

(3) G heißt **binärer Baum**, wenn G genau eine Ecke mit Grad 2 hat (*Wurzel*) und jede andere Ecke Grad 1 oder 3 hat. Ecken mit Grad 1 heißen *Blätter*. Die Länge eines längsten Weges von der Wurzel an heißt *Höhe des Baumes*.



binärer Baum, Höhe $h = 3$

Bemerkung 4.39 : In einem Baum ist jede Kante eine Brücke (sonst gäbe es einen Kreis).

Satz 4.40 : Ist G ein Baum mit $|E| = n$, so gilt $\quad |K| = n - 1$

Beweis : Induktion über $|E|$

$|E| = 1 \Rightarrow |K| = 0 \quad , \quad |E| = 2 \Rightarrow |K| = 1$

Sei $G(E, K)$ ein Baum mit $|E| = n + 1$, $k \in K$. k ist Brücke, so daß der Graph G^*, der aus G durch Entfernung von k entsteht, aus 2 Komponenten G_1, G_2 besteht, die selber Bäume sind. Gilt $|E_1| = r$, $|E_2| = s$, so folgt $r + s = n + 1$ und nach Induktionsannahme $|K_1| = r - 1$, $|K_2| = s - 1$, also $r + s - 2 = n - 1$, also $|K| = n$.

Bemerkung 4.41 : Ein *Gerüst* ist ein Baum, der alle Ecken von G enthält.
Ein Baum ist sein eigenes Gerüst.

Satz 4.42 : Ein zusammenhängender Graph $G(E, K)$ ist genau dann ein Baum, wenn je 2 Ecken durch genau einen Weg verbunden sind.

Beweis :

"$\Rightarrow$" Annahme: zwei Ecken seien durch 2 Wege verbunden $\Rightarrow$ es gibt einen Kreis $\Rightarrow$ Widerspruch.

"$\Leftarrow$" Seien in G je 2 Ecken durch genau einen Weg verbunden.
Annahme: es gebe einen Kreis C in G. Dann wären 2 Ecken auf C durch 2 verschiedene Wege verbunden $\Rightarrow$ Widerspruch.

Satz 4.43 : Sei $G(E,K)$ ein *binärer Baum.*

(1) Hat G die Höhe h, so hat G höchstens 2^h Blätter.

(2) Hat G b Blätter, so hat G mindestens die Höhe $[\log_2 b]$ ([ ] Gauß-Klammer).

Beweis :

(1) Vollständige Induktion über h

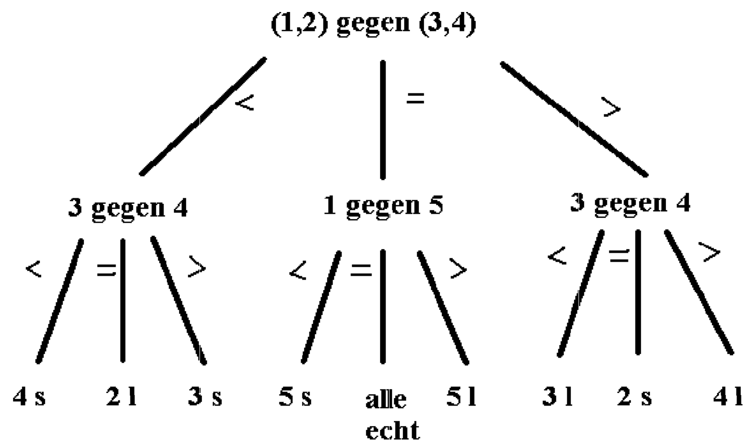
$h = 0 \Rightarrow G$ besteht nur aus der Wurzel, also $1 = 2^0$ Blatt

"$h-1 \to h$": Sei G binärer Baum der Höhe h. "Pflücken" aller Blätter liefert einen binären Baum G^* der Höhe $h-1$ mit höchstens 2^{h-1} Blättern (nach Induktionsannahme). Aus jedem Blatt von G^* wachsen höchstens 2 Blätter von G. Also hat G höchstens 2^h Blätter.

(2) Aus (1) folgt: $b \leq 2^h = e^{h \ln 2}$. Mit $b = e^{\ln b}$ folgt: $\ln b \leq h \ln 2 \Rightarrow \log_2 b \leq h$.

Beispiel 4.44 : Entscheidungsbaum

Gegeben seien 5 Münzen $\{1,2,3,4,5\}$. Münze 1 sei echt , aber unter den restlichen Münzen sei evt. eine falsche (schwerer oder leichter) Münze.
Kann dies mit Hilfe einer Balkenwaage durch 2 Wägungen entschieden werden?



(s = schwerer, l = leichter)

4.1.5 Hamiltonsche Graphen

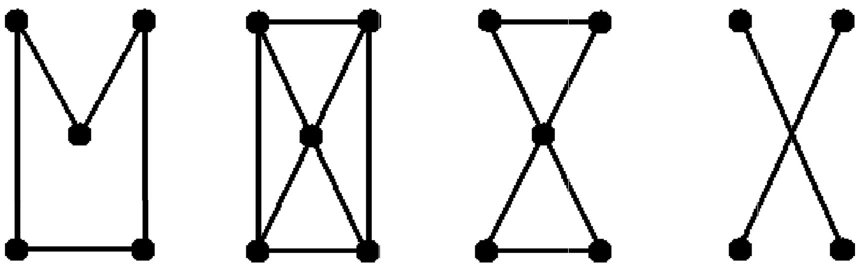
Definition 4.45 : Sei $G(E, K)$ ein Graph.

(1) Ein *geschlossener* Kantenzug heißt **Hamilton-Zug**, wenn er *jede Ecke aus E genau ein Mal* enthält.

(2) G heißt **Hamiltonsch**, wenn G einen Hamilton-Zug enthält.

Bemerkung 4.46 : Ein Hamilton-Zug ist ein Kreis.

Beispiel 4.47 :



hamiltonsch, eulersch	*hamiltonsch, nicht eulersch*	*nicht hamiltonsch, eulersch*	*nicht hamiltonsch, nicht eulersch*

Beispiel 4.48 : Das Problem des **Handlungsreisenden** (**TSP**=traveling salesman problem)

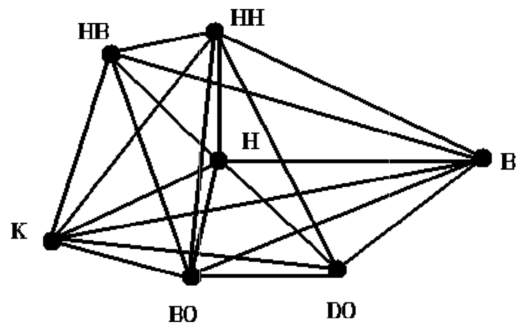
Ein Handlungsreisender startet in einer Stadt zu einer Rundtour durch vorgegebene Städte mit schließlicher Rückkehr zum Ausgangspunkt. Wie muß die Tour gewählt werden, damit die Gesamtkosten minimal werden?

Dieses Problem kann folgendermaßen graphentheoretisch umgesetzt werden:

Gegeben ist der vollständige Graph K_n (n Städte) und eine Kostenmatrix
$W = (w_{i,j})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n}$ mit $w_{i,j} \geq 0$, $w_{i,j} = w_{j,i}$.

Gesucht ist ein Hamilton-Zug durch K_n mit den Kanten $k_1, k_2, \ldots, k_n$ und den Kosten w_{i,j_i} bei Durchlaufen der Kante k_i so, daß $\sum_{i=1}^{n} w_{i,j_i} = \text{Min}.$

Beispiel 4.49 :



Definition 4.50 : Sei $G(E, K)$ ein Graph.

G heißt **k-(ecken)zusammenhängend**, wenn G mehr als k Ecken hat (also $|E| > k$), und jeder Teilgraph von G, der durch Entfernung von höchstens $(k-1)$ Ecken aus G entsteht, zusammenhängend ist.

Bemerkung 4.51 :

(1) Ist G k- aber nicht $(k+1)$-zusammenhängend, so gibt es Teilgraphen von G, die durch Entfernung von k Ecken entstehen und nicht mehr zusammenhängend sind.

(2) Gilt für $G(E, K)$: $|E| \geq 2$, so sind die Eigenschaften "zusammenhängend" und "1-zusammenhängend" gleich.

Beispiel 4.52 :

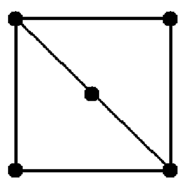
a) Sei $G(E, K)$ ein Baum mit $|E| \geq 2$, so ist G 1- aber nicht 2-zusammenhängend.

b) Sei $G(E, K)$ ein Kreis der Länge $l \geq 3$, dann ist G 2- aber nicht 3-zusammenhängend.

c) Sei $G(E, K) = K_n$. Dann gilt: K_n ist $(n-1)$- aber nicht n-zusammenhängend.

Bemerkung 4.53 : Besitzt $G(E, K)$ einen Hamilton-Zug, so ist G 2-zusammenhängend, da ein Hamilton-Zug geschlossen ist und jede Ecke genau ein Mal trifft.
Die Umkehrung dieser Aussage ist falsch, wie folgendes Beispiel zeigt.

Beispiel 4.54 :



2-zusammenhängend,
aber nicht hamiltonsch

Satz 4.55 : (Dirac) Sei $G(E, K)$ ein Graph ohne Schlingen und ohne Mehrfachkanten (also schlicht) mit $|E| \geq 2$.
Gilt $d(e) \geq \frac{1}{2}|E|$ für alle $e \in E$, so besitzt G einen Hamilton-Zug.

Beweis : (indirekt, vgl. Tittmann, S.120-121)

Bemerkung 4.56 :

(1) Die Voraussetzung $d(e) \geq \frac{1}{2}|E|$ ist nicht notwendig, sondern nur einfache Schranke für die Kantennzahl, da ein Graph mit genügend vielen Kanten sicher Hamiltonsch ist.

(2) Ist $G(E, K)$ ein Graph mit $|E| = n$, $|K| = m$ und $H(E, \tilde{K})$ ein Untergraph von G mit $\tilde{K} \subset K$, $|\tilde{K}| = n$, so ist H genau dann ein Hamilton-Zug von G, wenn H zusammenhängend ist und $d(e) = 2$ für alle $e \in E$ (bzg. H) gilt.
Dies ist ein Kriterium für "kleine" Graphen.

(3) Es gibt bisher kein einfaches Kriterium für die Existenz eines Hamilton-Zuges, und damit auch kein Standard-Lösungsverfahren für die Konstruktion eines Hamilton-Zuges.
Es gibt auch kein Standard-Lösungsverfahren für das Problem des Handlungsreisenden (TSP), es existieren nur individuelle Ansätze (vgl. Aigner, S.140-143), die aber nicht unbedingt das Minimum ergeben.

4.1.6 Planare und plättbare Graphen

Definition 4.57 :

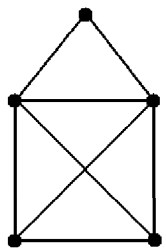
(1) Ein Graph $G(E, K)$ heißt **planar**, wenn sich zwei seiner Kanten höchstens in einer Ecke schneiden.

(1) Ein Graph $G(E, K)$ heißt **plättbar**, wenn er überschneidungsfrei in die Ebene gezeichnet werden kann.

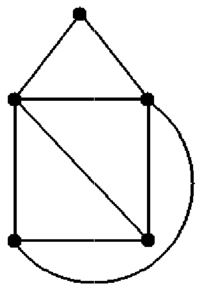
Bemerkung 4.58 : Ein planarer Graph zerlegt die Ebene in g Gebiete, z.B.:

a) $G = \text{Baum} \Rightarrow g = 1$, b) $G = \text{Kreis} \Rightarrow g = 2$.

Beispiel 4.59 :



nicht planar, aber plättbar



planar, 5 Gebiete

Satz 4.60 : (Eulersche Polyederformel)

Sei $G(E, K)$ ein zusammenhängender planarer Graph mit $|E| = n$, $|K| = m$, der die Ebene in g Gebiete zerlegt.

Dann gilt $n - m + g = 2$.

Beweis : Vollständige Induktion über g (Anzahl der Gebiete)

$g = 1 \Rightarrow G$ hat keine Kreise $\Rightarrow G = \text{Baum} \Rightarrow n = m+1 \Rightarrow n-m+g = m+1-m+1 = 2$.

"$g \to g + 1$" mit $g \geq 1$:

Sei G zusammenhängend und G zerlege die Ebene in $(g+1)$ Gebiete. Dann ist G kein Baum, da $g+1 > 1$, also enthält G einen Kreis. Entfernung einer Kante k^* aus diesem Kreis liefert den Graphen G^* mit $(m-1)$ Kanten und n Ecken. G^* zerlegt die Ebene in g Gebiete, also nach Induktionsannahme $2 = n - (m-1) + g = n - m + (g+1)$.

Beispiel 4.61 : vgl. Beispiel 4.59:

$|E| = n = 5$, $|K| = m = 8$, $g = 5 \Rightarrow n - m + g = 5 - 8 + 5 = 2$.

Satz 4.62 : Sei $G(E, K)$ ein zusammenhängender planarer Graph, bei dem je zwei Ecken durch höchstens eine Kante verbunden sind. Dann gilt:

(1) Hat G mindestens 3 Ecken, so ist $|K| \leq 3|E| - 6$.

(2) Es gibt mindestens eine Ecke mit Grad $d(e) \leq 5$.

Beweis :

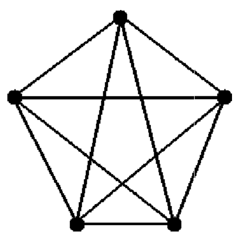
(1) Ist L ein Gebiet mit der Grenzkantenzahl $l(L)$, so gilt wegen $l(L) \geq 3$: $\sum\limits_{L \text{ Gebiet}} l(L) \geq 3g$, andererseits gilt: $\sum\limits_{L \text{ Gebiet}} l(L) \leq 2|K|$, da jedes Grenzkantenstück eines Gebietes in G höchstens 2-mal gezählt wird, also $3g \leq 2|K|$. Aus Satz 4.60 folgt $2 = |E| - |K| + g \leq |E| - |K| + \frac{2}{3}|K| \Rightarrow |K| \leq 3|E| - 6$.

(2) Für $|E| = 1$ oder $|E| = 2$ ist diese Aussage offenbar richtig.
Für $|E| \geq 3$ gilt mit $\delta = \min\limits_{e \in E} d(e)$

$$\delta|E| \leq \sum_{e \in E} d(e) \leq 2|K| \leq 6|E| - 12 < 6|E| \Rightarrow \delta \leq 5.$$

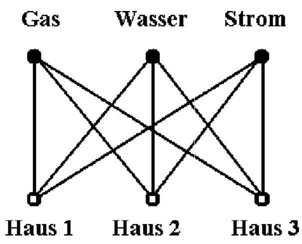
Bemerkung 4.63 : In einem zusammenhängenden planaren Graphen, bei dem je zwei Ecken durch höchstens eine Kante verbunden sind, wächst die Kantenzahl höchstens *linear* mit der Eckenzahl (im Gegensatz zu beliebigen Graphen, bei denen dieses Wachstum quadratisch sein kann).

Beispiel 4.64 : Der vollständige Graph K_5 ist nicht plättbar.



denn: K_5 hat 5 Ecken und $\binom{5}{2} = 10$ Kanten und damit gilt $10 \not\leq 3 \cdot 5 - 6$.

Beispiel 4.65 : Der vollständige bipartite Graph $K_{3,3}$ ist nicht plättbar.



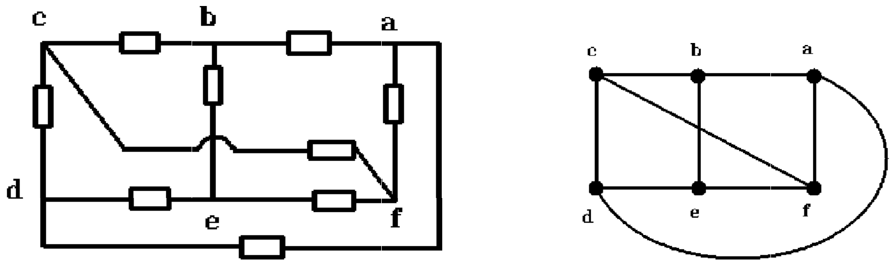
denn: $K_{3,3}$ hat 6 Ecken und 9 Kanten. Wenn $K_{3,3}$ plättbar wäre, so müßte nach Satz 4.60 gelten: $g = 2 - n + m = 5$ Gebiete. Da $K_{3,3}$ bipartit ist, enthält $K_{3,3}$ keine Kreise ungerader Länge. Deshalb muß jedes Gebiet von mindestens 4 Kanten berandet sein. Da jede Kante gleichzeitig Randstück zweier Gebiete ist, folgt $|K| = m \geq 10$. Das ist aber ein Widerspruch zu $m = 9$.

Bemerkung 4.66 : Es ist also nicht möglich, 3 Häuser kreuzungsfrei mit Gas, Wasser und Strom zu versorgen.

Satz 4.67 : (Kuratowski)
Enthält $G(E, K)$ K_5 oder $K_{3,3}$ als Untergraphen, so ist G nicht plättbar.

Beweis : (vgl. z.B. Tittmann)

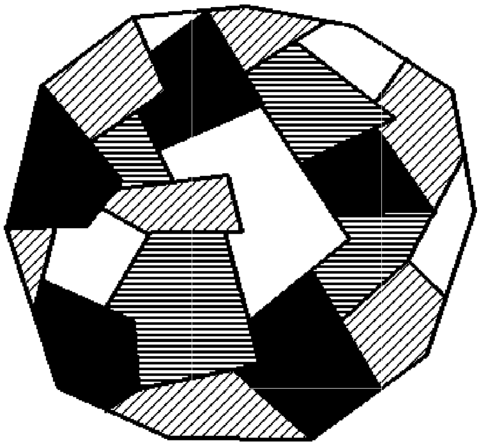
Beispiel 4.68 :



Durch obige Schaltung sei ein elektrischer Schaltkreis gegeben, wobei die Rechtecke gewisse Schaltungselemente bedeuten.
Der zugeordnete Graph ist nicht planar und auch nicht plättbar.

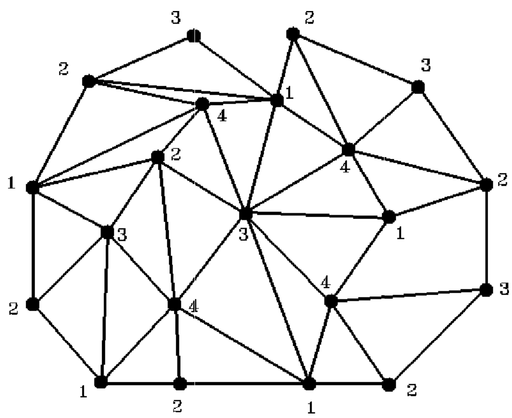
4.1.7 Eckenfärbung

Vierfarbenproblem: Können die Länder jeder beliebigen Landkarte so mit vier Farben gefärbt werden, daß je zwei benachbarte Länder verschiedenfarbig sind?



Übersetzung in die Graphentheorie

Jedem Land wird eine Ecke zugeordnet. Zwei Ecken werden genau dann durch eine Kante verbunden, wenn die entsprechenden Länder eine gemeinsame Grenze haben. Dieser Graph kann planar gezeichnet werden.



Farben: 1=schwarz, 2=schräg gestreift, 3=weiß, 4=waagerecht gestreift

Definition 4.69 : Sei $G(E, K)$ ein Graph.

(1) Eine **Eckenfärbung** von G ist eine Zuordnung der Farben (bezeichnet mit den Zahlen $1, 2, \ldots, n$) zu den Ecken, so daß adjazente Ecken unterschiedlich gefärbt sind.

(2) Die **Chromatische Zahl** $\chi(G)$ ist die kleinste natürliche Zahl n, so daß G mit n Farben gefärbt werden kann.

Beispiel 4.70 : Sei $G(E, K)$ ein Kreis. Dann gilt:

a) Länge von G *gerade* $\Rightarrow \chi(G) = 2$

b) Länge von G *ungerade* $\Rightarrow \chi(G) = 3$.

Beispiel 4.71 : Für den vollständigen Graphen K_n mit n Ecken gilt: $\chi(K_n) = n$.

Konstruktion einer Eckenfärbung (Greedy-Algorithmus)

Sei $G(E, K)$ ein Graph mit $\triangle(G) = \max\limits_{e \in E} d(e)$ und seien die Ecken nummeriert $e_1, e_2, \ldots, e_n$.

e_1 erhält Farbe 1, e_2 erhält Farbe 2,
e_i erhält die kleinstmögliche Farbe,
falls $d(e_i) = \triangle(G)$ und alle $\triangle(G)$ Nachbarecken bereits mit verschiedenen Farben gefärbt sind, muß für e_i die Farbe $(\triangle(G) + 1)$ gewählt werden, sonst ist eine der Farben $\in \{1, 2, \ldots, \triangle(G)\}$ möglich.

Aus diesem Konstruktionsverfahren folgt:

Satz 4.72 : Ist $G(E, K)$ ein Graph, so gilt $\chi(G) \leq \triangle(G) + 1$.

Bemerkung 4.73 :

(1) Für den vollständigen Graphen K_n gilt:
$\chi(K_n) = n,\ \triangle(K_n) = n - 1$, also $\chi(G) = \triangle(G) + 1$ (Gleichheit).

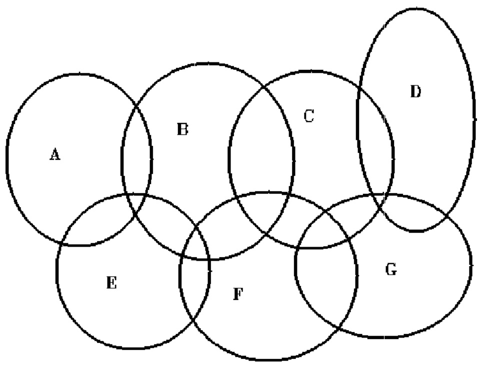
(2) Für Kreise *ungerader* Länge gilt:
$\chi(G) = 3,\ \triangle(G) = 2$, also $\chi(G) = \triangle(G) + 1$ (Gleichheit).

(3) (Brooks, 1941) Für alle anderen Graphen gilt:
$\chi(G) < \triangle(G) + 1$ (Ungleichheit).

Satz 4.74 : (Vierfarbensatz) Die Chromatische Zahl eines *planaren Graphen* ist höchstens *vier*.

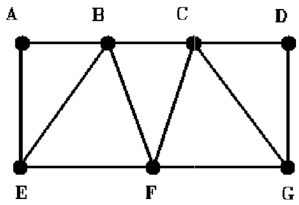
Beweis : (Apel/Haken, 1976)

Beispiel 4.75 : Frequenzplanung in einem Funknetz

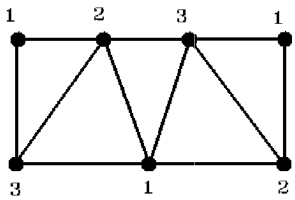


Jede Sendestation eines Funknetzes versorgt ein Gebiet. Benachbarte Sender müssen verschiedene Frequenzen benutzen.

Zugeordneter Graph: Die Ecken sind die Sender A, B, C, D, E, F, G. Zwei Ecken werden genau dann durch eine Kante verbunden, wenn sich die Sendebereiche überlappen.

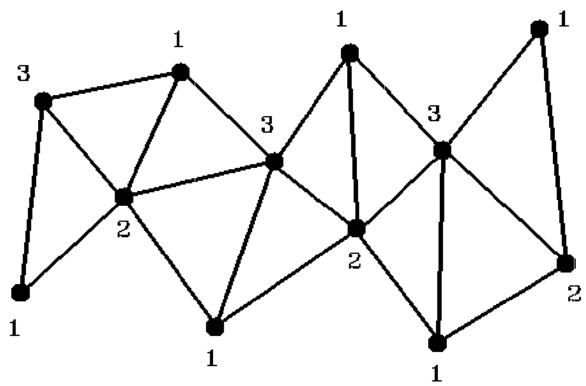


Dieser Graph ist planar und enthält offenbar K_3 als Untergraph. Somit sind für eine Eckenfärbung mindestens 3 Farben notwendig, aber in diesem Fall auch ausreichend, also $\chi(G) = 3$.



Für das Funknetz reichen daher drei verschiedene Frequenzen.

Der obige Graph ist ein Beispiel für einen *triangulierten polygonalen Graphen.*
Für einen solchen Graphen gilt immer $\chi(G) = 3$



4.1.8 Kantenfärbung, Faktorisierung

Definition 4.76 : Sei $G(E, K)$ ein Graph.

(1) Eine **Kantenfärbung** von G ist eine Zuordnung der Farben (bezeichnet mit den Zahlen $1, 2, \ldots, n$) zu den Kanten, so daß inzidente Kanten unterschiedlich gefärbt sind.

(2) Der **Chromatische Index** $\chi'(G)$ ist die kleinste natürliche Zahl n, die für eine Kantenfärbung notwendig ist.

Beispiel 4.77 : Sei $G(E, K)$ ein Kreis. Dann gilt:

a) Länge von G *gerade* $\Rightarrow \chi'(G) = 2$

b) Länge von G *ungerade* $\Rightarrow \chi'(G) = 3$.

Bemerkung 4.78 : Mit $\triangle(G) = \max\limits_{e \in E} d(E)$ gilt:

(1) $\chi'(G) \geq \triangle(G)$, da mit einer Ecke e mit $d(e) = \triangle(G)$ $\triangle(G)$ Kanten inzident sind.

(2) (Vizing, 1964) $\chi'(G) = \triangle(G)$ oder $\chi'(G) = \triangle(G) + 1$.

Satz 4.79 : (König) Ist $G(E, K)$ *bipartit*, so gilt $\chi'(G) = \triangle(G)$.

Beweis : Vollständige Induktion über $|K| = m$

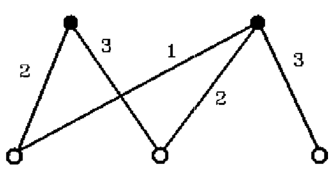
$m = 0 \Rightarrow \triangle(G) = 0 = \chi'(G)$

"$m - 1 \to m$": Sei $G(E, K)$ ein bipartiter Graph mit m Kanten. Durch Entfernung von $k^* \in K$ erhält man G^* mit $(m-1)$ Kanten, also $\chi'(G^*) = \triangle(G^*)$ nach Induktionsannahme. Gilt nun

a) $\triangle(G^*) = \triangle(G)$, so kann der Grad der zu k^* inzidenten Ecken e_1, e_2 nicht maximal sein. Wegen $\chi'(G^*) = \triangle(G^*) = \triangle(G)$ gibt es in G^* eine Farbe, die nicht bei den zu e_1, e_2 inzidenten Kanten vorkommt und mit der k^* färbbar ist, also $\chi'(G) = \chi'(G^*) = \triangle(G^*) = \triangle(G)$. Gilt nun

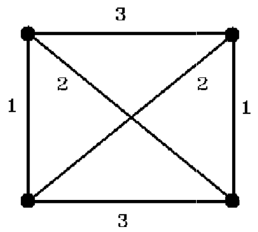
b) $\triangle(G^*) < \triangle(G)$, also $\triangle(G) = \triangle(G^*) + 1$, so hat mindestens eine der zu k^* inzidenten Ecken maximalen Grad $\triangle(G^*)$, k^* muß daher mit Farbe $\triangle(G^*) + 1 = \triangle(G)$ gefärbt werden.

Beispiel 4.80 :



$\chi'(G) = \triangle(G) = 3$

Bemerkung 4.81 : Satz 4.79 ist nicht umkehrbar, wie das folgende Beispiel zeigt:



$G(E,K) = K_4$
(vollständiger Graph mit 6 Kanten)
$\chi'(G) = 3 = \triangle(K_4)$,
aber K_4 nicht bipartit

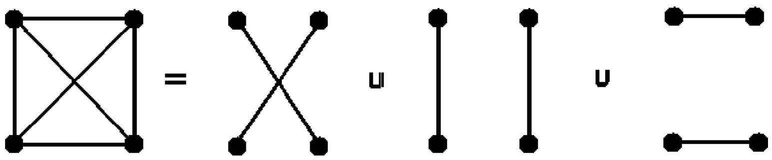
Definition 4.82 : Sei $G(E,K)$ ein Graph.

(1) Eine Teilmenge $\tilde{K}$ von K, so daß jedes $e \in E$ auf *genau einer* Kante $k \in \tilde{K}$ liegt, heißt **Faktor** von G.

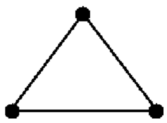
(2) Eine Zerlegung von K in Faktoren heißt **Faktorisierung** von G.

(3) Haben alle Ecken von G denselben Grad, so heißt G **regulär**.

Beispiel 4.83 :



K_4 *Faktor* *Faktor* *Faktor*



K_3 hat offenbar keinen Faktor

Bemerkung 4.84 :

(1) Faktor $= \{k \in K \ : \ k \text{ disjunkt, alle Ecken kommen vor}\}$.

(2) G habe Faktor $\Rightarrow |E|$ gerade.

(3) G habe Faktorisierung $\Rightarrow G$ regulär.

denn:

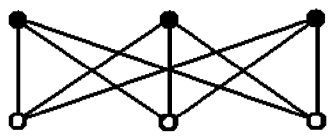
zu (2): Eine Kante ist genau zu 2 Ecken inzident.

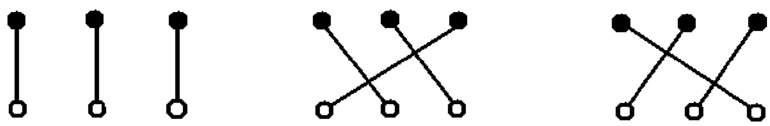
zu (3): Jede Ecke liegt auf genau einer Kante eines jeden Faktors, also hat jede Ecke den Grad, der durch die Anzahl der Faktoren der Faktorisierung gegeben ist.

Satz 4.85 : Ist der Graph $G(E, K)$ *bipartit* und *regulär*, so besitzt er eine Faktorisierung.

Beweis : Sei G regulär und bipartit. Dann gilt: $d(e) = \triangle(G)$ für alle $e \in E$ und nach Satz 4.79 (König) $\chi'(G) = \triangle(G)$, d.h. G hat eine Kantenfärbung mit $\triangle(G)$ Farben. Somit kommt an jeder Ecke jede dieser Farben genau ein Mal vor. Sei $F_i = \{k \in K \ : \ k \text{ habe Farbe } i\}$, $1 \leq i \leq \triangle(G)$. Dann ist F_i ein Faktor, da jede Ecke zu genau einer Kante gehört. $\{F_1, F_2, \ldots, F_{\triangle(G)}\}$ ist dann eine Faktorisierung von G, da jede Kante in genau einem Faktor F_i vorkommt.

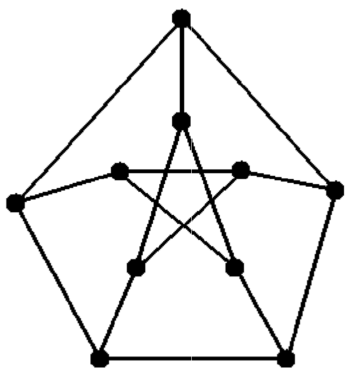
Beispiel 4.86 : $K_{3,3}$ ist bipartit und regulär und hat folgende Faktorisierung





Faktor 1 *Faktor 2* *Faktor 3*

Bemerkung 4.87 : Nicht jeder reguläre Graph ist faktorisierbar, wie das folgende Beispiel zeigt



Petersen-Graph

G ist regulär mit $\triangle(G) = d(e) = 3$ für alle $e \in E$. Wäre G faktorisierbar, so hätte er 3 Faktoren und es müßte $\chi'(G)$ gleich 3 sein, aber es ist $\chi'(G) = 4$ (überprüfen!). Damit ist dieser Graph auch nicht bipartit, denn sonst müßte er nach Satz 4.79 (König) faktorisierbar sein.

4.2 Digraphen (gerichtete Graphen)

4.2.1 Grundbegriffe

Definition 4.88 :

(1) Ein **Digraph** (gerichteter Graph) $\vec{G}(E,B)$ besteht aus einer Eckenmenge E und einer Bogenmenge B. Ein **Bogen** b ist eine gerichtete Kante derart, daß b eindeutig das geordnete Eckenpaar (e,f) zugeordnet ist. e heißt Anfangs- , f heißt Endecke von b.
Die Bögen b_1, b_2 heißen **parallel**, wenn ihre Anfangs- und Endecken gleich sind.
Die Bögen b_1, b_2 heißen **antiparallel**, falls $b_1 = (e,f)$ und $b_2 = (f,e)$.

(2) $\vec{G}(E,B)$ heißt **schlicht**, wenn $\vec{G}(E,B)$ keine Schlingen und keine parallelen Bögen enthält.

(3) Eine Bogenfolge $b_1 = (e_1,e_2), b_2 = (e_2,e_3), \ldots, b_k = (e_k,e_{k+1})$ heißt **Weg**, wenn keine Ecke mehrfach auftritt.
Ein Weg heißt **Kreis**, wenn der Weg geschlosen ist, also $e_1 = e_{k+1}$.

(4) $e \in E$ heißt von $u \in E$ **erreichbar**, wenn in $\vec{G}(E,B)$ ein Weg von u nach e existiert.

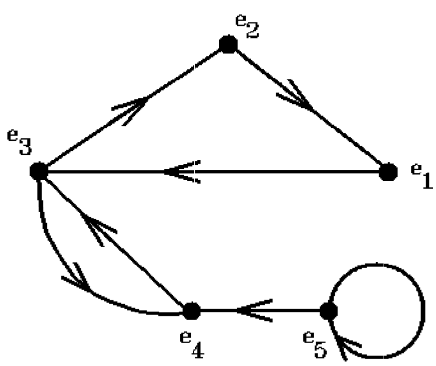
(5) Ein (ungerichteter) Graph $G(E,K)$ heißt **unterliegend** zu $\vec{G}(E,B)$, wenn $G(E,K)$ aus $\vec{G}(E,B)$ durch Fortlassung der Orientierung entsteht.

(6) $\vec{G}(E,B)$ heißt
a) **zusammenhängend**, wenn der unterliegende Graph $G(E,K)$ zusammenhängend ist
b) **stark zusammenhängend**, wenn je zwei seiner Ecken gegenseitig erreichbar
c) **azyklisch**, wenn $\vec{G}(E,B)$ keinen Kreis enthält.

(7) Eine **Orientierung** eines ungerichteten Graphen $G(E,K)$ ist ein gerichteter Graph $\vec{G}(E,B)$, indem jede Kante durch einen Bogen ersetzt, also mit einer Richtung versehen wird.

(8) $G(E,K)$ heißt **orientierbar**, wenn $G(E,K)$ eine stark zusammenhängende Orientierung besitzt.

Beispiel 4.89 :



e_5 ist von keinem e_i erreichbar,
aber e_i ist erreichbar von e_5 , $(1 \leq i \leq 4)$.
$\vec{G}(E,B)$ ist zusammenhängend, aber
nicht stark zusammenhängend.
$(e_5,e_4),(e_4,e_3),(e_3,e_2),(e_2,e_1)$ ist ein Weg,
$(e_1,e_3),(e_3,e_2),(e_2,e_1)$ ist ein Kreis.

Bemerkung 4.90 : Ist $G(E,K)$ ein Graph mit $|E| = n$, $|K| = m$, so hat $G(E,K)$ 2^m verschiedene Orientierungen. (Beweis mit vollständiger Induktion)

Definition 4.91 : Ein (ungerichteter) Graph $G(E,K)$ heißt **k-fach kantenzusammenhängend**, wenn G zusammenhängend ist und jeder Teilgraph, der durch Entfernen von höchstens $(k-1)$ Kanten aus $G(E,K)$ entsteht, zusammenhängend ist.

Bemerkung 4.92 :

(1) Ist G 2-fach kantenzusammenhängend, dann hat G keine Brücke.

(2) Bäume sind 1-fach-, Kreise sind 2-fach kantenzusammenhängend.

Satz 4.93 : Sei $G(E,K)$ ein ungerichteter Graph. Dann gilt:
$G(E,K)$ orientierbar $\Leftrightarrow$ $G(E,K)$ ist 2-fach kantenzusammenhängend.

Beweis :
"$\Rightarrow$": Annahme: G ist nur 1-fach kantenzusammenhängend $\Rightarrow$ G besitzt eine Brücke $\Rightarrow$ G ist nicht orientierbar, da eine Orientierung der Brücke nur die Erreichbarkeit in eine Richtung liefert.

"$\Leftarrow$": Ist G 2-fach kantenzusammenhängend, so sind zwei Ecken $e_1, e_2 \in E$ durch mindestens 2 kantendisjunkte Wege miteinander verbunden, von denen einer als Hinweg, der andere als Rückweg orientiert werden kann.

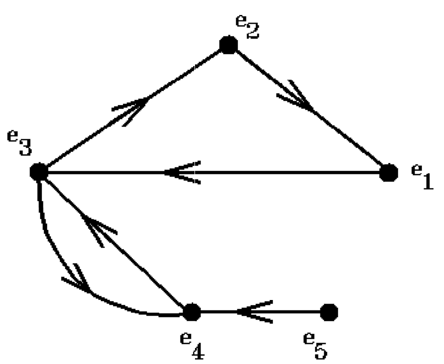
Definition 4.94 : Sei $\vec{G}(E,B)$ ein Digraph (gerichteter Graph) und sei $e \in E$ eine Ecke von $\vec{G}$.

(1) $d^+(e) := |\{(e,v) \; : \; v \in E\}|$ heißt **Außen**-, oder **Aus**- oder **Ausgangsgrad** von e.

(1) $d^-(e) := |\{(v,e) \; : \; v \in E\}|$ heißt **Innen**-, oder **In**- oder **Eingangsgrad** von e.

(3) Ist $d^+(e) = 0$, so heißt e **Senke**; ist $d^-(e) = 0$, so heißt e **Quelle**.

Beispiel 4.95 :



$d^+(e_1) = 1$, $d^-(e_1) = 1$
$d^+(e_2) = 1$, $d^-(e_2) = 1$
$d^+(e_3) = 2$, $d^-(e_3) = 2$
$d^+(e_4) = 1$, $d^-(e_4) = 2$
$d^+(e_5) = 1$, $d^-(e_5) = 0$ (Quelle)

Bemerkung 4.96 :

(1) $d^+(e)$ ist also die Anzahl der in e beginnenden Bögen, $d^-(e)$ die Anzahl der in e endenden Bögen.

(2) $\sum_{e \in E} d^+(e) = \sum_{e \in E} d^-(e) = |B|$,
da jeder Bogen genau je eine Anfangs- und eine Endecke hat.

Satz 4.97 : Sei $\vec{G}(E,B)$ ein Digraph ohne Kreis. Dann besitzt $\vec{G}$ eine Quelle und eine Senke.

Beweis : Sei $e \in E$. Falls

a) $d^+(e) = 0 \Rightarrow e$ ist Senke,

b) $d^+(e) > 0 \Rightarrow$ es gibt $b_1 = (e, e_1) \in B$. Dann ist entweder e_1 eine Senke, oder es gibt $b_2 = (e_1, e_2) \in B$, usw. Fortsetzung liefert entweder eine Senke oder eine in e endende Bogenfolge. Da $\vec{G}$ keinen Kreis enthält, kann letzter Fall nicht eintreten. Also existiert eine Senke. (für Quelle analog)

4.2.2 Zyklus, Masche

Definition 4.98 : Sei $\vec{G}(E,B)$ ein Digraph.

(1) Eine Folge von Bögen $\{b_1, b_2, \ldots, b_k\}$, $b_i \in B$, die im unterliegenden Graphen G einen geschlossenen Kantenzug bildet, heißt **Zyklus**.

(2) Ein Zyklus heißt **Elementarzyklus** oder **Masche**, wenn der Kantenzug in G ein Kreis ist.

Bemerkung 4.99 :

(1) Ein Zyklus ist als disjunkte Vereinigung von Maschen darstellbar.

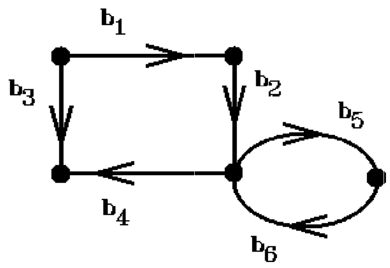
(2) Ein Kreis in $\vec{G}$ ist eine Masche, in der alle Ecken den Ingrad 1 haben.

Sei $\vec{G}(E,B)$ ein Digraph mit $|E| = n, |B| = m, B = \{b_1, b_2, \ldots, b_m\}$. Jedem Zyklus von $\vec{G}$ sei eine Durchlaufrichtung zugeordnet, z.B. entgegen dem Uhrzeigersinn (also mathematisch positiv). Dann läßt sich jedem Zyklus C von $\vec{G}$ ein Vektor $\vec{x}(C) \in \mathbb{R}^m$ folgendermaßen zuordnen:
$\vec{x}(C) = (x_1, x_2, \ldots, x_m)^T$ mit

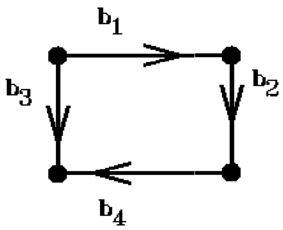
$$x_i = \begin{cases} 1 & \text{falls } b_i \in C \text{ und Orientierung von } b_i = \text{Orientierung von } C \\ -1 & \text{falls } b_i \in C \text{ und Orientierung von } b_i = -(\text{Orientierung von } C) \\ 0 & \text{falls } b_i \notin C \end{cases}$$

Damit wird jedem Zyklus eineindeutig ein Vektor $\vec{x} \in \mathbb{R}^m$ zugeordnet, also:
$C \leftrightarrow \vec{x}(C) \in \mathbb{R}^m$.

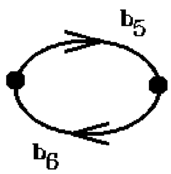
Beispiel 4.100 : $\vec{G}(E, B)$



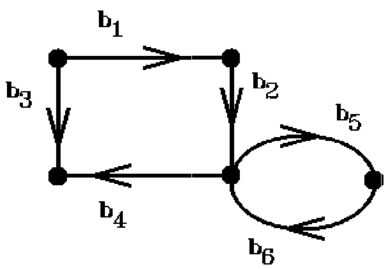
Zyklen:



$$\longleftrightarrow \quad \vec{x}^{(1)} = (-1, -1, 1, -1, 0, 0)^T$$



$$\longleftrightarrow \quad \vec{x}^{(2)} = (0, 0, 0, 0, -1, -1)^T$$



$$\longleftrightarrow \quad \vec{x}^{(3)} = (-1, -1, 1, -1, -1, -1)^T$$

Die ersten beiden Zyklen sind Maschen, der dritte Zyklus ist die Summe der ersten beiden.

Definition 4.101 : Sei $\vec{G}(E, B)$ ein Digraph mit $|B| = m$.

(1) k Zyklen von $\vec{G}$ heißen **linear abhängig** (bzw. unabhängig) , wenn ihre zugeordneten Vektoren $\vec{x}^{(1)}, \vec{x}^{(2)}, \ldots, \vec{x}^{(k)} \in I\!R^m$ linear abhängig (bzw. unabhängig) sind.

(2) Die Anzahl der linear unabhängigen Maschen von $\vec{G}$ heißt **Zyklomatische Zahl** $\mu(\vec{G})$.

Beispiel 4.102 : Im Beispiel 4.100 gibt es 2 linear unabhängige Maschen, also $\mu(\vec{G}) = 2$.

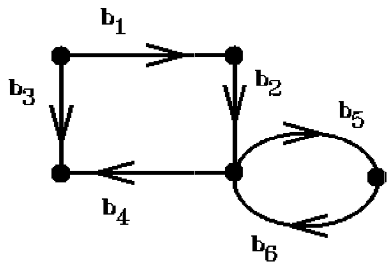
Satz 4.103 : Sei $\vec{G}(E, B)$ ein Digraph.

(1) Besteht der unterliegende Graph G aus $l \geq 1$ Komponenten (maximal zusammenhängende Untergraphen), so gilt für die zyklomatische Zahl $\mu(\vec{G}) = |B| - |E| + l$.

(2) Ist $\vec{G}(E, B)$ zusammenhängend mit $|E| \geq 2$, so gilt:
$\vec{G}$ ist stark zusammenhängend $\Leftrightarrow$ Durch jeden seiner Bögen verläuft ein Kreis.

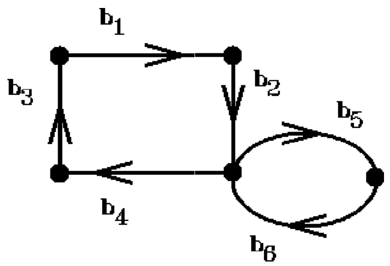
Beweis : (siehe Tittmann, S.133-137)

Beispiel 4.104 :



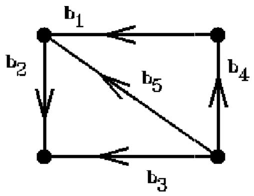
$|E| = 5, |B| = 6, l = 1$
$\Rightarrow \mu(\vec{G}) = 6 - 5 + 1 = 2$

Beispiel 4.105 :

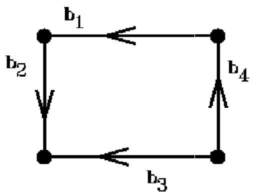


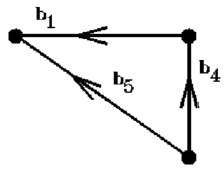
$\vec{G}(E, B)$ ist stark zusammenhängend

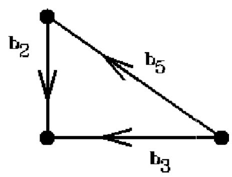
Beispiel 4.106 :



Maschen:







$\vec{x}^{(1)} = (1, 1, -1, 1, 0)$ $\qquad$ $\vec{x}^{(2)} = (1, 0, 0, 1, -1)$ $\qquad$ $\vec{x}^{(3)} = (0, 1, -1, 0, 1)$

Fassen wir die Vektoren als Zeilenvektoren einer Matrix Z zusammen, so erhalten wir

$$Z = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Wenden wir hierauf den Gauß-Algorithmus an, so können wir den Rang von Z berechnen:

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \operatorname{rang}(Z) = 2$$

$\Rightarrow \mu(\vec{G}) = 2.$

Dieses Ergebnis hätten wir natürlich auch mit Satz 4.103 erhalten:

$\mu(\vec{G}) = |B| - |E| + l = 5 - 4 + 1 = 2.$

Bemerkung 4.107 : In einem elektrischen Netzwerk sind die Maschen elementare Zyklen des zugehörigen Digraphen. Die zyklomatische Zahl liefert die Anzahl der unabhängigen Maschengleichungen, die zur Berechnung der Netzgrößen benötigt werden.

4.2.3 Turnier

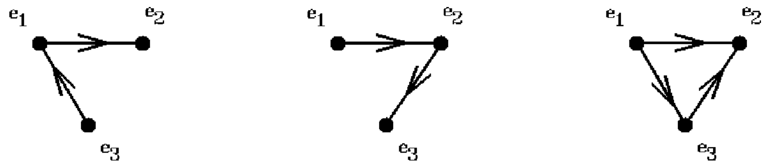
Definition 4.108 : Ein Digraph $\vec{G}(E,B)$ heißt **Turnier**, wenn der unterliegende Graph vollständig ist.

Bemerkung 4.109 : Ein Turnier ist eine Orientierung von K_n.

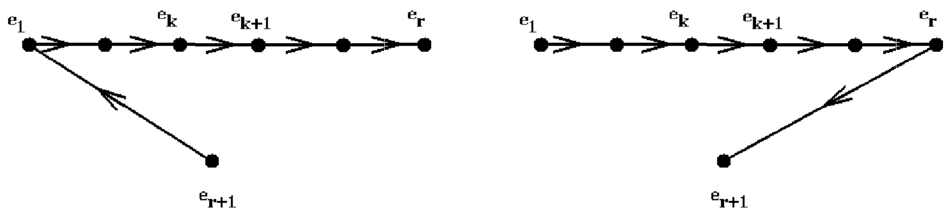
Satz 4.110 : In jedem Turnier gibt es einen (offenen) Hamiltonzug, d.h. einen gerichteten Weg, der alle Ecken genau 1 mal enthält.

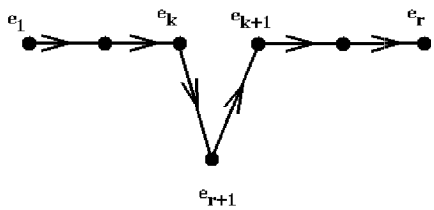
Beweis : (Konstruktionsbeweis)

Beginne mit dem Bogen $(e_1,e_2) \in B$. Wegen der Vollständigkeit des unterliegenden Graphen gibt es eine Ecke $e_3 \in E$ so, daß $(e_3,e_1) \in B$ oder $(e_1,e_3) \in B$ oder $(e_3,e_2) \in B$ oder $(e_2,e_3) \in B$.
Falls $(e_3,e_1) \in B$, wähle $(e_3,e_1),(e_1,e_2)$,
falls $(e_2,e_3) \in B$, wähle $(e_1,e_2),(e_2,e_3)$,
falls $(e_3,e_2) \in B$, wähle $(e_1,e_3),(e_3,e_2)$.
Falls $(e_1,e_3) \in B$, muß auch mindestens eine der drei vorstehenden Möglichkeiten bestehen.



Sei nun ein gerichteter Weg $(e_1,e_2),(e_2,e_3),\ldots,(e_{r-1},e_r)$ durch die verschiedenen Ecken $e_1,e_2,\ldots,e_r \in E$ mit $r < n = |E|$ konstruiert, so kann eine weitere Ecke e_{r+1} in diesen Weg eingebunden werden. Es gibt folgende Möglichkeiten:
Falls $(e_{r+1},e_1) \in B$, wähle $(e_{r+1},e_1),(e_1,e_2),(e_2,e_3),\ldots,(e_{r-1},e_r)$,
falls $(e_r,e_{r+1}) \in B$, wähle $(e_1,e_2),(e_2,e_3),\ldots,(e_{r-1},e_r),(e_r,e_{r+1})$.
Sei nun $(e_1,e_{r+1}) \in B$ und $(e_{r+1},e_r) \in B$. Sei $1 \leq k < r$ der größte Index mit $(e_k,e_{r+1}) \in B$, so wähle $(e_1,e_2,),\ldots,(e_{k-1},e_k),(e_k,e_{r+1}),(e_{r+1},e_{k+1}),\ldots,(e_{r-1},e_r)$.





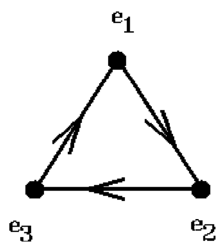
Mit dieser Konstruktion werden nach endlich vielen Schritten alle Ecken von $\vec{G}$ erreicht.

Bemerkung 4.111 : Für beliebige Digraphen ist bisher kein einfaches Kriterium für die Existenz eines Hamiltonweges bekannt.

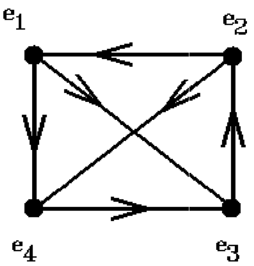
Satz 4.112 : Ein stark zusammenhängender Turniergraph $\vec{G}(E,B)$ ist hamiltonsch, besitzt also einen geschlossenen Hamiltonzug.

Beweis : Sei e_1 eine beliebige Ecke. Da $\vec{G}$ stark zusammenhängend ist, gibt es einen Bogen $b = (e_1, e_2)$ der von e_1 wegführt (zur Ecke e_2). Nach Satz 4.110 gibt es einen gerichteten Weg von e_2 nach e_1, der alle Ecken genau einmal durchläuft. Fügen wir an diesen Weg den Bogen $b = (e_1, e_2)$ an, so erhalten wir einen geschlossenen Hamiltonweg.

Beispiel 4.113 :



$(e_1, e_2), (e_2, e_3), (e_3, e_1)$

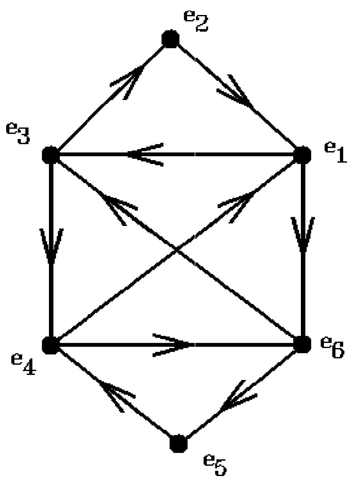


$(e_1, e_4), (e_4, e_3), (e_3, e_2), (e_2, e_1)$

Satz 4.114 : Sei $\vec{G}(E,B)$ ein Digraph. Dann gilt
$\vec{G}$ ist eulersch $\Leftrightarrow$ Für alle Ecken gilt: Eingangsgrad = Ausgangsgrad.

Beweis : Da (Eingangsgrad = Ausgangsgrad), ist der Eckengrad immer gerade, also der unterliegende Graph G eulersch. Da (Eingangsgrad = Ausgangsgrad) kommt man auch immer in der richtigen Richtung weiter.

Beispiel 4.115 :



$(e_1, e_6), (e_6, e_5), (e_5, e_4), (e_4, e_6), (e_6, e_3), (e_3, e_2), (e_2, e_1), (e_1, e_3), (e_3, e_4), (e_4, e_1)$