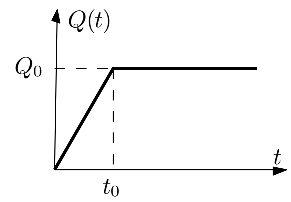
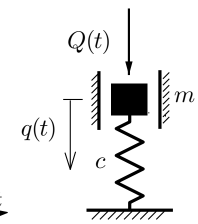
Aufgabe 6

Die Masse m des Einmassenschwingers ist über eine Feder der Steifigkeit c mit dem Fundament verbunden. Auf die Masse wirkt die zeitlich veränderliche Kraft $Q(t)$.





1. Wie entwickelt sich $q(t)$, wenn der Schwinger zur Zeit $t = 0$ in Ruhe ist ($q(0) = 0$, $\dot{q}(0) = 0$)?

2. Wie langsam muss die Belastung geändert werden, damit man für $t \geq t_0$ quasistatisch rechnen darf?

Lösung zu Aufgabe 6

Es sei $q_{\text{st}} = Q_0/c\,$; Belastung: $\quad Q(t) = \begin{cases} c\, q_{\text{st}}\, \frac{t}{t_0} & (0 \leq t \leq t_0), \\ c\, q_{\text{st}} & (t \geq 0). \end{cases}$

Differentialgleichung der Bewegung: $\quad m\,\ddot{q} + c\,q = Q(t) \quad$ bzw. $\quad \ddot{q} + \omega^2\, q = \dfrac{Q}{m} \quad$ mit $\quad \omega^2 = c/m.$

<u>Zeitbereich 1</u>: $\quad 0 \leq t \leq t_0 : \qquad q_1(t) = c_1\, \sin(\omega\, t) + c_2\, \cos(\omega\, t) + q_{\text{st}}\, \dfrac{t}{t_0}.$

Anfangsbedingungen: $\quad q(0) = 0 = c_2,$

$\dot{q}(0) = 0 = \omega\, c_1 + q_{\text{st}}\, \frac{1}{t_0} \quad \rightsquigarrow \quad c_1 = -q_{st}\, \frac{1}{\omega\, t_0}.$

Hieraus: $\quad \boxed{q_1(t) = q_{\text{st}} \left\{ \dfrac{t}{t_0} - \dfrac{\sin(\omega\, t)}{\omega\, t_0} \right\}}$

Übergangsbedingungen: $\quad q(t_0) = q_{\text{st}} \left\{ 1 - \dfrac{\sin(\omega\, t)}{\omega\, t_0} \right\}, \qquad \dot{q}(t_0) = \dfrac{q_{\text{st}}}{t_0}\, \{1 - \cos(\omega\, t_0)\}\,.$

<u>Zeitbereich 2</u>: $\quad t \geq t_0 : \qquad q_2(t) = \bar{d}_1\, \sin(\omega\, t) + \bar{d}_2\, \cos(\omega\, t) + q_{\text{st}}$

$$= d_1\, \sin[\omega\,(t - t_0)] + d_2\, \cos[\omega\,(t - t_0)] + q_{\text{st}}.$$

Mit den Übergangsbedingungen erhalten wir:

$$q_2(t_0) = d_2 + q_{\text{st}} = q_{\text{st}} \left\{ 1 - \tfrac{\sin(\omega\, t)}{\omega\, t_0} \right\} \quad \rightsquigarrow \quad d_2 = -\tfrac{\sin(\omega\, t_0)}{\omega\, t_0}\, q_{\text{st}},$$

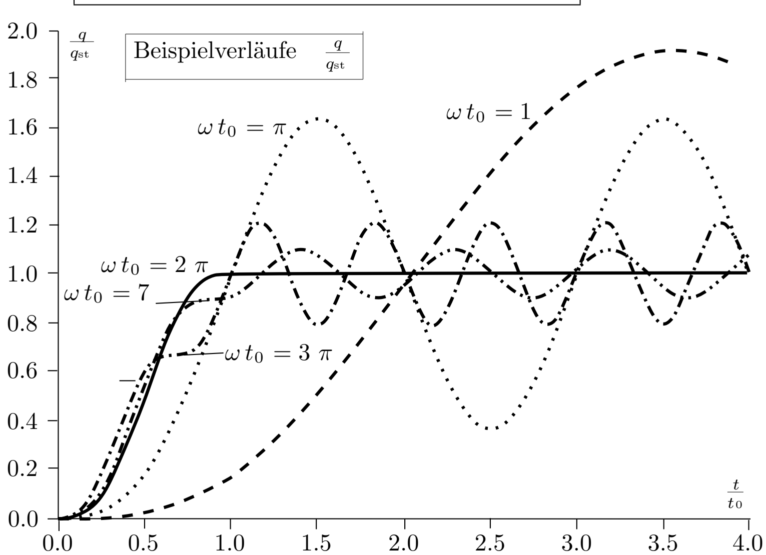
$$\dot{q}_2(t_0) = \omega\, d_1 = \tfrac{q_{\text{st}}}{t_0}\, \{1 - \cos(\omega\, t_0)\} \quad \rightsquigarrow \quad d_1 = \tfrac{q_{\text{st}}}{\omega\, t_0}\, \{1 - \cos(\omega\, t_0)\}\,,$$

womit

$$q_2(t) = q_{\text{st}} \left\{ 1 + \frac{1 - \cos(\omega\, t_0)}{\omega\, t_0}\, \sin[\omega\,(t - t_0)] - \frac{\sin(\omega\, t_0)}{\omega\, t_0}\, \cos[\omega\,(t - t_0)] \right\},$$

$$q_2(t) = q_{\text{st}} \left\{ 1 + \frac{\sin[\omega\,(t - t_0)] - \sin(\omega\, t)}{\omega\, t_0} \right\} \quad (\text{mit} \sin x\, \cos x + \cos x\, \sin x = \sin[x + y]),$$

$$\boxed{q_2(t) = q_{\text{st}} \left\{ 1 + \frac{\cos[\omega\,(t - \frac{t_0}{2})]\, \sin(\omega\, \frac{t_0}{2})}{\omega\, t_0/2} \right\}} \quad (\text{mit} \sin x + \sin y = 2\, \sin \frac{x + y}{2}\, \cos \frac{x - y}{2}).$$



– Insbesondere ist $q_2(t) = q_{\text{st}}$ für $\sin(\omega\, \frac{t_0}{2}) = 0$, d.h. für $\boxed{\omega\, t_0 = 2\, n\, \pi} \quad n = 1, 2, 3 ... \infty$

– Da $\frac{\sin x}{x} \leq 1$ für $x > 0$ ist, gilt $\boxed{0 < q_2(t) \leq 2\, q_{\text{st}}}$, egal welchen Wert $\omega = \sqrt{c/m}$ hat.